



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Инженерная и компьютерная графика»

Учебное пособие

«Начертательная геометрия в вопросах и ответах»

Автор
Егоров М.С.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

В предлагаемом пособии изложены только самые необходимые разделы курса начертательной геометрии. Особое внимание уделено наглядности чертежей, приводится большое количество пространственных рисунков, способствующих пониманию рассматриваемых примеров и развитию пространственного воображения студентов.

В конце каждой темы приводятся примеры решения некоторых типовых задач и варианты для самоподготовки. Приступая к решению задач по данной теме, полезно ознакомиться с соответствующим примером и следовать ему при выполнении заданий. При выполнении задач необходимо максимально точно копировать их условия, искажения в чертеже графического условия могут привести к неудачным, нечетким изображениям в решениях, а элементы решения могут выходить за рамки формата.

В конце каждого раздела приводятся вопросы для самоконтроля, ответы на которые находятся в тексте соответствующего раздела, задачи для самостоятельной работы. Затем предлагается тест для проверки правильности понимания материала раздела и умения применять его на практике, ответы на тесты и примеры решения задач приведены в конце пособия.



Автор



К.т.н., доцент,
Зав. кафедрой «Инженерная
и компьютерная графика»
Егоров М.С.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	
ТЕМА 1. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ	
1.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ПРОЕКЦИРОВАНИИ	
1.2 ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ	
1.3 ПРОЕКЦИРОВАНИЕ И ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ, ЛЕЖАЩЕЙ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ	
1.4 ПРОЕКЦИРОВАНИЕ И ЧЕРТЕЖИ ТОЧЕК, РАСПОЛОЖЕННЫХ ВО ВТОРОЙ – ЧЕТВЕРТОЙ ЧЕТВЕРТЯХ	
1.5 ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ТРЕХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ	
1.6 ПРОЕКЦИРОВАНИЕ И ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ...	
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ»	
ТЕСТ ПО ТЕМЕ «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ»	
ТЕМА 2. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ	
2.1 ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ЛИНИИ	
2.2 ПРЯМАЯ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
2.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ – ПРАВИЛО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА	
2.4 ПРЯМЫЕ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ	
2.5 СЛЕДЫ ПРЯМОЙ ЛИНИИ	
2.6 ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ПРЯМОЙ ЛИНИИ	
2.7 ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ	
2.7 ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПРЯМОГО УГЛА	

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ»	
ТЕСТ ПО ТЕМЕ «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ»	
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМАМ «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ», «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ»	
ТЕМА 3. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ	
3.1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ	
3.2 ПЛОСКОСТЬ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
3.3 ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ	
3.4 ТОЧКА И ПРЯМАЯ В ПЛОСКОСТИ	
3.4.1 ПРЯМАЯ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
3.4.2 ПРЯМЫЕ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТЯХ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
3.4.3 ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА ПЛОСКОСТИ	
3.4.4 ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ ПЛОСКОСТИ	
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ»	
ТЕСТ ПО ТЕМЕ «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ»	
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ»	
ТЕМА 4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ	
4.1 СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ	
4.1.1 ВРАЩЕНИЕ ТОЧКИ	
4.1.2 ВРАЩЕНИЕ ПРЯМОЙ	
4.1.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
4.1.4 ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ	

4.1.5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ	
4.2 СПОСОБ ПЕРЕМЕНИ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ	
4.2.1 СУЩНОСТЬ СПОСОБА	
4.2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
4.2.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ»	
ТЕСТ ПО ТЕМЕ «СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ»	
ТЕМА 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА	
5.1 МНОГОГРАННИКИ	
5.1.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ	
5.1.2 ПРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКА ПЛОСКОСТЬЮ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ	
5.1.3 ПРЕСЕЧЕНИЕ ПИРАМИДЫ ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ	
5.1.4 ПРЕСЕЧЕНИЕ ПИРАМИДЫ ПЛОСКОСТЬЮ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
5.2 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТЕЛА. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ	
5.2.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ	
5.2.2 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНУСА ПЛОСКОСТЬЮ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ	
5.2.3 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ	
5.2.4 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА ПЛОСКОСТЬЮ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ	
5.2.5 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТЕЛ	

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА»	
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА»	
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	46
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	48

Толковый словарь терминов

Горизонталь плоскости – это прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций.

Криволинейные тела – это геометрические тела, образованные кривыми поверхностями.

Линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций П1, П2, П3 – это прямые лежащие в ней и перпендикулярные соответственно к горизонталям, фронталям или профильным прямым.

Линии проекционной связи – прямые, перпендикулярные к оси проекций и пересекающие эту ось в одной и той же точке. На них расположены проекции некоторой точки, расположенной в пространстве.

Многогранник – это тело, со всех сторон ограниченное плоскостями. Элементами многогранника являются вершины, ребра и грани.

Общее положение объектов в пространстве – это положение не параллельное, не перпендикулярное ни одной из плоскостей проекций.

Ортогональная проекция точки на плоскость – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на соответствующую плоскость проекций.

Параллельное проецирование – центр проецирования удален по заданному направлению в бесконечность. Проецирующие лучи параллельны между собой и заданному направлению проецирования.

Плоскости уровня или плоскости двойного проецирования – это плоскости, перпендикулярные двум плоскостям проекций или, параллельные третьей плоскости проекций.

Проецирование – это процесс построения изображений предметов на плоскости проекций с помощью проецирующих лучей.

Проецирующие плоскости – это плоскости, перпендикулярные одной плоскости проекций.

Проецирующие прямые – это прямые, параллельные двум плоскостям проекций и перпендикулярные третьей плоскости проекций.

Проекция точки – это точка пересечения проецирующего луча, проходящего через проецируемую точку, с плоскостью проекций.

Проекция фигуры – это совокупность проекций всех ее точек.

Прямые уровня – это прямые, параллельные одной из плоскостей проекций.

След плоскости – это линия пересечения плоскости с плоскостью проекций.

След прямой линии – точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

Тела вращения – это такие тела, поверхность которых образована в результате вращения прямой или кривой линии вокруг некоторой оси.

Фронталь плоскости – это прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций.

Центральное проецирование – все проецирующие лучи выходят из одного центра проекций.

Частное положение объектов в пространстве – это положение параллельное или перпендикулярное хотя бы одной из плоскостей проекций.

Эпюр или чертеж – это изображение, полученное в результате совмещения плоскостей проекций.

Принятые обозначения

1. Плоскости проекций:
горизонтальная – П1
фронтальная – П2
профильная – П3
дополнительные плоскости проекций – П4, П5... .
2. Оси проекций – строчными буквами x , y , z (Начало координат – прописной буквой O).
3. Точки:
в пространстве – заглавными буквами латинского алфавита A , B , C , D ... ;
вспомогательные: – цифрами 1, 2, 3... ;
4. Проекции точек
- горизонтальные – $A1$, $B1$, $C1$... ;
фронтальные – $A2$, $B2$, $C2$... ;
профильные – $A3$, $B3$, $C3$
5. Совпадение проекций точек
 $A1 \equiv B1$, $A2 \equiv B2$... ;
совпадение точки с ее проекцией $A \equiv A2$, $M \equiv M1$
6. Следы прямых:
горизонтальный – M ($M1$, $M2$, $M3$)... ;
фронтальный – N ($N1$, $N2$, $N3$)... ;
профильный – P ($P1$, $P2$, $P3$)... .
7. Плоскости в пространстве – строчными буквами греческого алфавита α , β , γ
8. Следы плоскостей:
горизонтальные – $\alpha П1$, $\beta П1$, $\gamma П1$... ;
фронтальные – $\alpha П2$, $\beta П2$, $\gamma П2$... ;
профильные – $\alpha П3$, $\beta П3$, $\gamma П3$... ;
- точки схода следов – αx , βx , γx ; αy , βy , γy ; αz , βz , γz .

ТЕМА 1. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

1.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ПРОЕКЦИРОВАНИИ

В основу построения любого изображения на плоскости положена операция **проецирования**.

Суть этой операции рассматривается на примере построения изображения произвольной точки A на плоскости Π (рис. 1). Для того чтобы построить изображение точки A , находящейся в пространстве, на плоскости Π (этом случае Π называют плоскостью проекций) следует:

- выбрать центр проецирования в произвольной точке пространства S (точка S не принадлежит плоскости Π) ;
- из центра проецирования S через точку A провести прямую SA (проецирующий луч) и продлить ее до пересечения с плоскостью Π в точке A_{Π} (A_{Π} – проекция точки A на плоскости проекций Π).

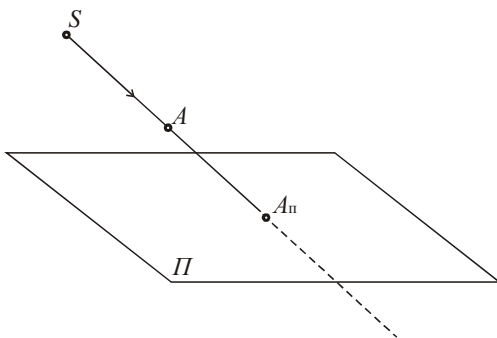


Рисунок 1

Процесс построения изображений предметов на плоскости проекций с помощью проецирующих лучей – называется проецированием.

Проекция точки – это точка пересечения проецирующего луча, проходящего через проецируемую точку, с плоскостью проекций.

Проекция фигуры – это совокупность проекций всех ее точек.

В зависимости от способа проведения проецирующих лучей, различают **центральное и параллельное** проецирование.

Центральное проецирование: в этом случае все проецирующие лучи выходят из одного центра проекций. На рис. 2 показан пример построения проекции кривой ABCD, находящейся в пространстве, на плоскости проекций П методом центрального проецирования. Из центра проецирования S последовательно проводят проецирующие лучи через точки кривой (A, B, C и D) и продлевают их до пересечения с плоскостью проекций П. В результате на плоскости П получаются проекции точек (Ап, Вп, Сп и Dп), которые при плавном соединении образуют проекцию заданной кривой на плоскости П.

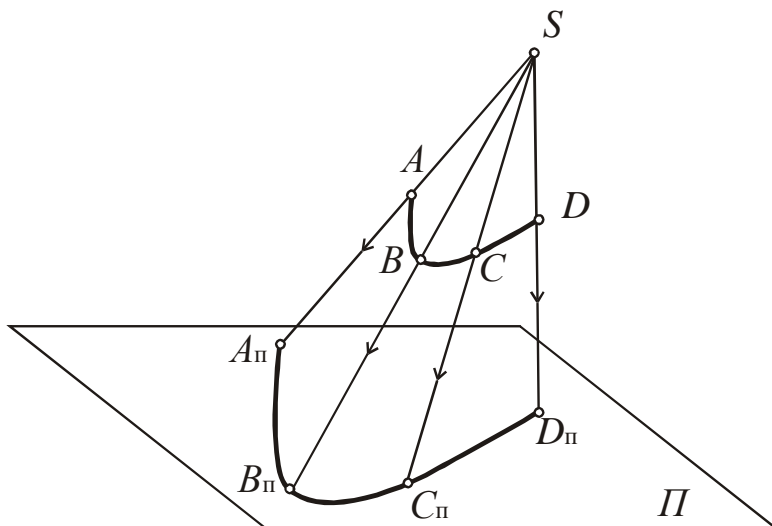
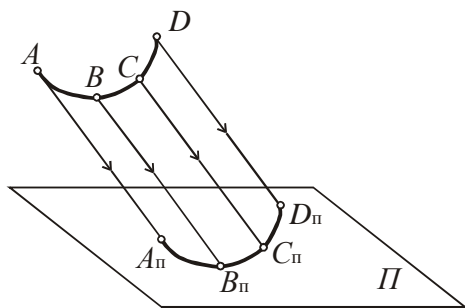


Рисунок 2- Центральное проецирование

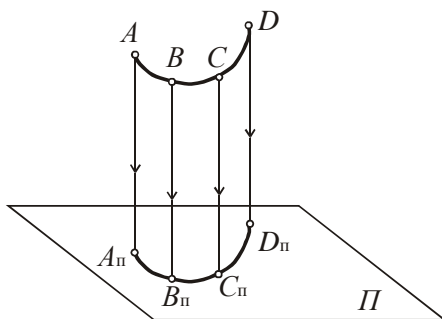
Центральное проецирование, при том, что позволяет получить проекцию объекта на плоскости, обладает очевидными недостатками. Построения, необходимые в этом случае проецирования, очень громоздки, сложны. Присутствует элемент случайности, т.к. центр проецирования выбирается субъективно. По центральной проекции тела невозможно определить его положение в пространстве, а также его истинные размеры.

Параллельное проецирование – частный случай центрального, когда центр проецирования удален по заданному направлению в бесконечность. Проецирующие лучи, при этом становятся практически параллельны между собой и заданному направлению проецирования. В зависимости от угла наклона проецирующих лучей к плоскости проекций. при параллельном проецировании различают *косоугольное* (рис.3,а) и *прямоугольное*

(ортогональное) проецирование (рис. 3,б).



а)



б)

Рисунок 3

При *косоугольном* параллельном проецировании (рис.3,а) проецирующие лучи и плоскость проекций составляют острый угол. Недостатками этого вида проецирования являются сложность построений и невозможность определения положения проецируемого объекта в пространстве по его имеющейся проекции.

При *прямоугольном (ортогональном)* проецировании (рис.3,б) направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций. В этом случае имеющаяся проекция тела может дать некоторое представление о его размерах и форме: удален элемент субъективности – направление проецирования строго фиксировано. Однако при использовании этого метода проецирования на одну плоскость, невозможно установить положение тела в пространстве, а также определить его точные пространственные размеры и форму. **Одна проекция точки не определяет ее положение в пространстве.**

Способ ортогонального параллельного проецирования положен в основу изучения курса начертательной геометрии и яв-

ляется главным в техническом черчении.

1.2 ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Учтя недостатки центрального и параллельного проецирования на одну плоскость, Гаспар Монж предложил использовать для проецирования две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, а проецирование проводить параллельно и ортогонально.

На рис. 4 изображена система двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

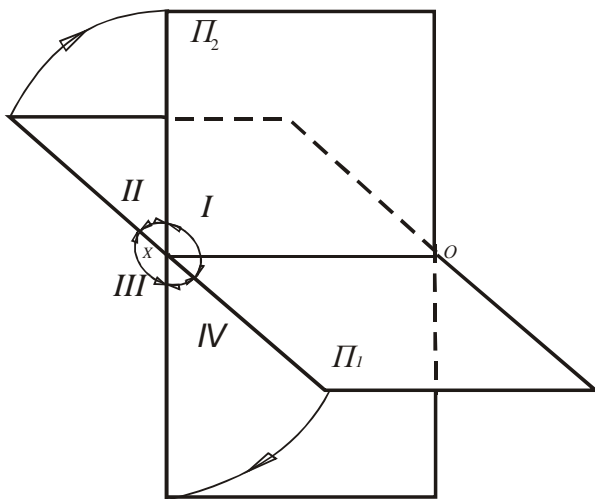


Рис. 4

Горизонтальная плоскость проекций обозначена - Π_1 , а **фронтальная** плоскость проекций – Π_2 (рис. 4).

Линия пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 называется **осью проекций (OX)**.

Плоскости Π_1 и Π_2 , пересекаясь между собой, делят все

пространство на четыре части, называемые **квадрантами** или **четвертями**. Верхняя ближняя часть пространства - I квадрант, верхняя дальняя часть пространства – II квадрант, нижняя дальняя часть пространства – III квадрант, нижняя ближняя часть пространства – IV квадрант.

1.3. ПРОЕЦИРОВАНИЕ И ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ, ЛЕЖАЩЕЙ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ

Для того чтобы спроецировать точку A , лежащую в первом квадранте пространства, на плоскости проекций P_1 и P_2 необходимо опустить из данной точки перпендикуляры (проецирующие лучи) на указанные плоскости проекций (рис. 5,а).

Ортогональная проекция точки на плоскость есть основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на соответствующую плоскость проекций. Тогда:

A_1 – **горизонтальная проекция точки A** (проекция точки A на горизонтальную плоскость проекций P_1).

A_2 – **фронтальная проекция точки A** (проекция точки A на фронтальную плоскость проекций P_2).

Проецирующие прямые AA_1 и AA_2 , перпендикулярные к плоскостям проекций P_1 и P_2 , образуют плоскость P , перпендикулярную к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций, а также к оси проекций OX . Эта плоскость пересекается с P_1 и P_2 по двум взаимно перпендикулярным прямым A_1A_x и A_2A_x . Таким образом, проекции некоторой точки получаются расположенными на прямых, перпендикулярных к оси проекций и пересекающих эту ось в одной и той же точке A_x . Линии A_1A_x и A_2A_x называются **линиями проекционной связи** (рис. 5,а).

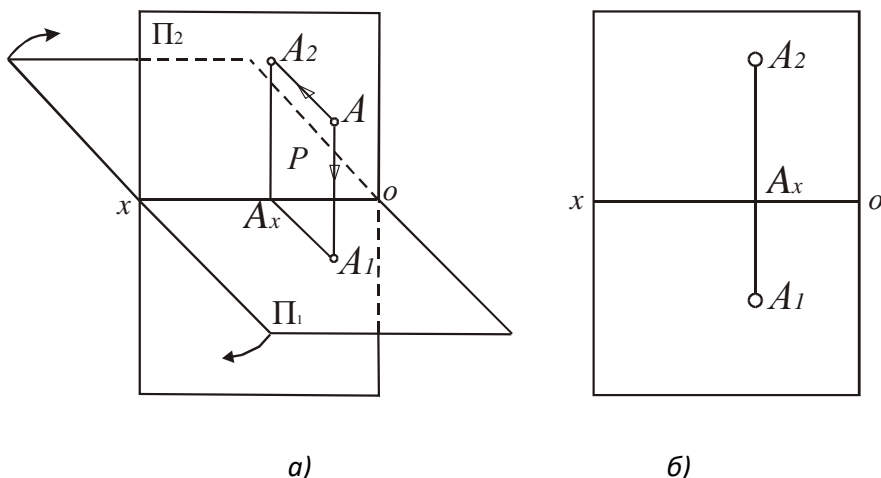


Рис. 5

Удалив точку A вместе с проецирующими прямыми AA_1 и AA_2 , поворачивают плоскость Π_1 вокруг оси проекций OX до совмещения с плоскостью Π_2 . В результате проведенного совмещения плоскостей получают плоское изображение – **чертеж точки**, известный под названием **эпюр Монжа** (рис. 5,6).

Изображение, полученное в результате совмещения плоскостей проекций, называется эпюром или чертежом.

На чертеже находятся проекции точки A , линии проекционной связи A_1A_x и A_2A_x , а также ось проекций OX . Анализируя полученный чертеж точки, можно утверждать, что **две проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве относительно данной системы плоскостей проекций**. Другими словами, по любому чертежу можно определить расстояния от изображенного объекта до плоскостей проекций. Действительно, расстояние от точки A до плоскости Π_1 равно расстоянию от самой точки A до ее горизонтальной проекции A_1 , а оно, в свою очередь, равно длине линии связи A_2A_x , которая присутствует на

чертеже. Аналогична ситуация с определением расстояния от точки А до фронтальной плоскости проекций Π_2 , оно равно длине имеющейся на чертеже линии связи A_1A_x .

Следует также обратить внимание и на расположение проекций точки относительно оси проекции OX . **Горизонтальная проекция точки А расположена ниже оси OX , а фронтальная – выше оси.** Такое расположение проекций характерно для точек, лежащих в первой четверти пространства.

1.4. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ И ЧЕРТЕЖИ ТОЧЕК, РАСПОЛОЖЕННЫХ ВО ВТОРОЙ – ЧЕТВЕРТОЙ ЧЕТВЕРТЯХ

Точка В лежит во втором квадранте пространства. Необходимо спроецировать ее на плоскости проекций. Для этого опускают из точки В перпендикуляры на Π_1 и Π_2 и находят горизонтальную B_1 и фронтальную B_2 проекции данной точки (рис.6,а). Выполнив операцию совмещения плоскостей, получают чертеж точки, расположенной во второй четверти (рис. 6,б): **горизонтальная и фронтальная проекции точки В находятся выше оси OX .**

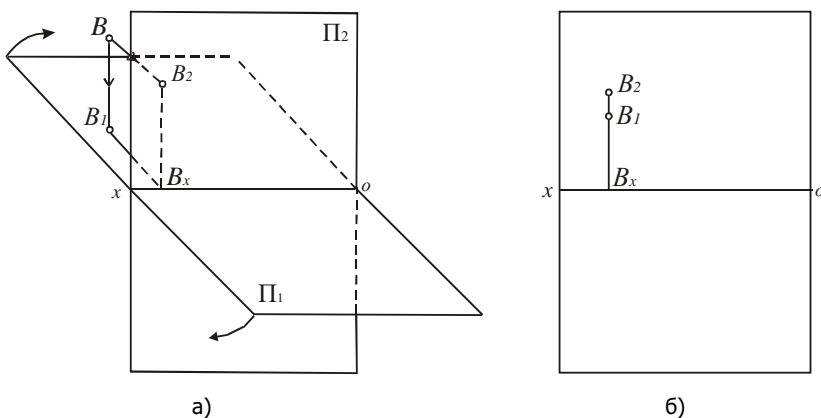


Рис. 6

В третьем квадранте пространства находится точка С. Чтобы найти ее проекции, опускают из точки С перпендикуляры на горизонтальную и фронтальную плоскости (рис. 7,а). После совмещения плоскостей получают характерный для всех точек, расположенных в третьей четверти, чертеж: **горизонтальная проекция точки находится выше оси ОХ, а фронтальная – ниже** (рис. 7,б).

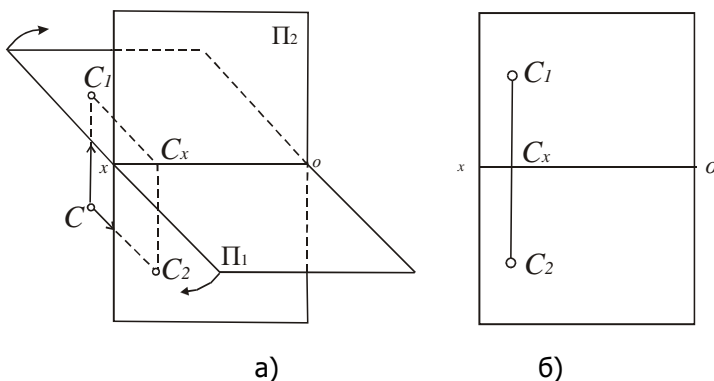


Рис. 7

И наконец, точка, расположенная в четвертом квадранте, – точка D. Для того чтобы спроецировать ее на плоскости проекций, опускают из нее перпендикуляры на плоскости Π_1 и Π_2 , обозначают проекции и проводят линии связи (рис.8,а).

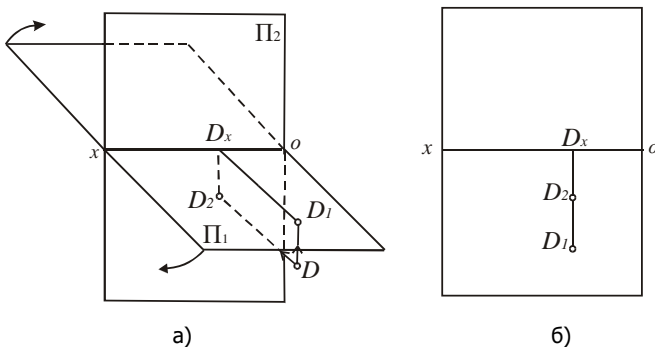


Рис. 8

Затем совмещают плоскости проекций и получают – характерный чертеж точек, лежащих в четвертой четверти пространства: **горизонтальная и фронтальная проекции точки D находятся ниже оси OX** (рис. 8,б).

1.5. ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ТРЕХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Известно, что две ортогональные проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве, однако в практике составления чертежей возникает необходимость в дополнительных проекциях объекта.

Для получения дополнительной проекции вводят третью плоскость проекций – **профильную (P_3)**, перпендикулярную плоскостям P_1 и P_2 . Проекции точек на эту плоскость называют **профильными** и обозначают с индексом 3, например **A_3** .

Горизонтальная, фронтальная и профильная плоскости проекций пересекаются между собой по прямым, называемым осями проекций: ось X, ось Y и ось Z (рис. 9). Считают, что направление оси X влево, оси Y вперед, оси Z вверх от начала координат является положительным.

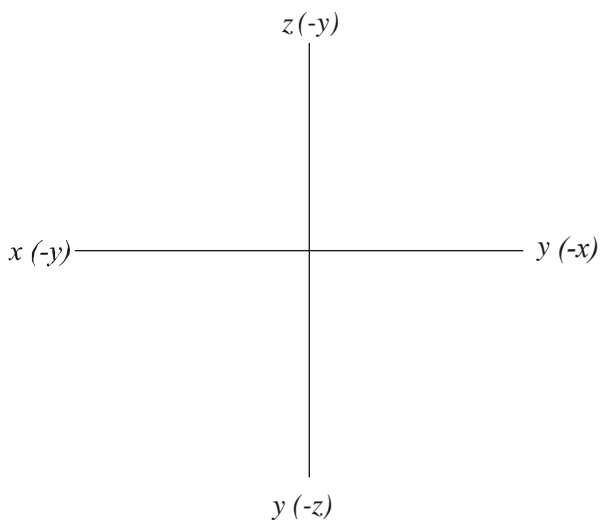
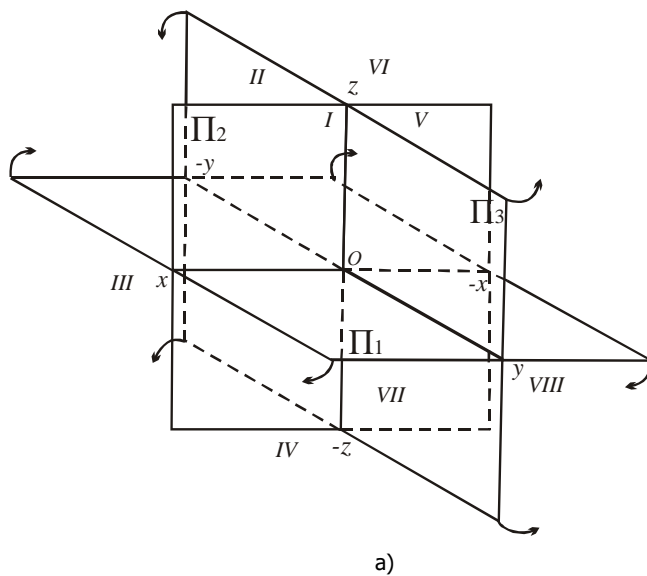


Рис. 9

Три взаимно перпендикулярные плоскости Π_1 , Π_2 и Π_3 , пересекаясь между собой, делят все пространство на восемь октантов. Нумерация первых четырех октантов ($X > 0$) совпадает с нумерацией четвертей. Последние четыре октанта ($X < 0$) симметричны первым относительно профильной плоскости проекций : пятый симметричен первому, шестой – второму , седьмой – третьему , восьмой – четвертому . В табл. 2 приведены знаки координат точек, соответствующие различным октантам.

Таблица 1.1- Значение координат

Октанты	Координаты точек		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Для перехода от объемного изображения к чертежу совмещают все три плоскости проекций с плоскостью чертежа путем вращения горизонтальной Π_1 и профильной Π_3 плоскостей вокруг осей X и Z соответственно.

При совмещении плоскости Π_1 с плоскостью Π_2 положительное направление оси Y совпадает с отрицательным направлением оси Z, а отрицательное направление оси Y – с положи-

тельным направлением оси Z.

При совмещении плоскости Π_3 с плоскостью Π_2 положительное направление оси Y совпадает с отрицательным направлением оси X, а отрицательное направление оси Y – с положительным направлением оси X.

Обозначив противоположные направления координатных осей на чертеже соответствующими знаками, получают обозначения осей проекций для восьми октантов (рис.9,6).

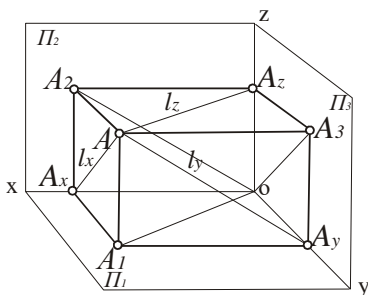
1.6. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ И ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Для того чтобы спроецировать точку A, расположенную в первом октанте пространства, необходимо опустить из точки перпендикуляры (проецирующие лучи) на соответствующие плоскости проекций. Основания этих перпендикуляров и будут являться проекциями точки A на горизонтальную, фронтальную и профильную плоскости проекций (рис. 10,а).

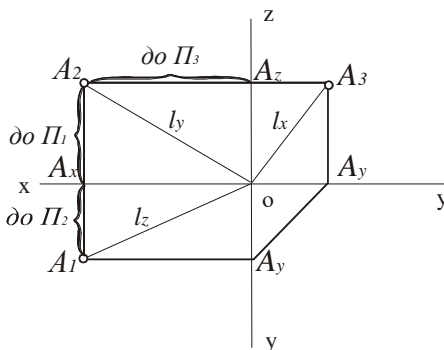
Совместив плоскости проекций, получают чертеж точки A в системе 3х плоскостей проекций (рис. 10,б). Это изображение точки A является метрически вполне определенным, т.к. расстояния от точки до плоскостей и осей проекций могут быть непосредственно измерены на чертеже. Так, на изображении, представленном на рис. 10,а, видно, что расстояние от точки A до горизонтальной плоскости проекций равно длине линии проекционной связи $A_2A_x = A_3A_y$ = координате Z точки A; расстояние от точки A до фронтальной плоскости проекций равно длине линии проекционной связи $A_1A_x = A_3A_z$ = координате Y точки A; а расстояние от A до профильной плоскости равно длине $A_1A_y = A_2A_z$ = координате X точки A.

Расстояние от точки A до оси X (AA_x) равно расстоянию от профильной проекции точки A до начала координат (A_3O), рас-

стояние от точки A до оси Y - это $AA_y = A_2O$, а расстояние от точки A до оси Z - $AA_z = A_1O$.



а)



б)

Рис. 10

При построении чертежей различных объектов необходимо соблюдать следующие положения:

а) горизонтальная и фронтальная проекции точки всегда находятся на одной вертикальной линии связи, перпендикулярной к оси X ;

б) фронтальная и профильная проекции точки всегда находятся на одной горизонтальной линии связи, перпендикулярной к оси Z;

в) профильная проекция точки настолько удалена от оси Z насколько горизонтальная удалена от оси X.

Следует также иметь в виду, что точка , у которой все три координаты значимые числа, расположена в пространстве. Точка, у которой одна из координат равна нулю, находится на соответствующей плоскости проекций. Если точка имеет две нулевые координаты, то она лежит на одной из осей проекций. И, наконец, если три координаты точки равны нулю, то такая точка расположена в начале координат.

В заключение необходимо остановиться на возможности определения номера октанта, в котором находится точка, по ее

чертежу, а точнее, по расположению относительно оси X двух ее проекций – горизонтальной и фронтальной. На рис. 11 показан принцип такого определения.

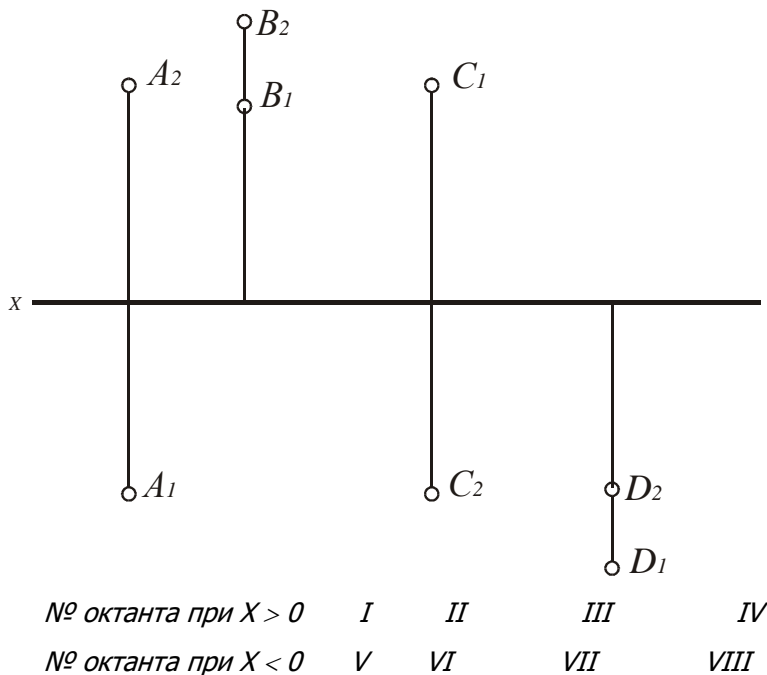


Рис. 11

При положительном значении координаты X номер октанта соответствует номеру четверти. То есть, если $X > 0$, горизонтальная проекция точки расположена ниже оси X , фронтальная проекция - выше оси X , то такая точка находится в первой четверти или в первом октанте пространства. Если же $X < 0$, а расположение горизонтальной и фронтальной проекций относительно оси X прежнее, то такая точка находится в пятом октанте пространства.

Вопросы для самоконтроля по теме « Проецирование точки»

1. Что называется проецированием?
2. Какие виды проецирования Вы знаете? Назовите их достоинства и недостатки?
3. Как расположены и как называются плоскости в ортогональной системе двух плоскостей проекций?
4. Что такое проекция точки?
5. В чем заключается операция совмещения плоскостей проекций.
6. Как на эюре определить расстояния от точки до плоскостей проекций?
7. Сколько проекций точки однозначно определяют ее положение в пространстве?
8. Какие две проекции точки всегда находятся на одной вертикальной линии связи?
9. Какие две проекции точки всегда находятся на одной горизонтальной линии связи?
10. Как определить, в какой четверти находится точка?
11. Для чего вводится и как расположена профильная плоскость проекций?
12. Как построить точку в ортогональной системе трех плоскостей проекций?
13. Как определить расстояния до плоскостей и осей проекций?
14. Как построить точку по заданным координатам?

Задачи для самостоятельной работы по теме «Проецирование точки»

1. Построить чертеж точки. Определить ее положение в пространстве и расстояния до плоскостей проекций, по следующим данным:

а) $A(20;30;40)$	б) $A(0;20;40)$	$E(-40;20;10)$
$B(-20;50;-20)$	$B(30;0;-50)$	$F(-30;-30;10)$
$C(10;-40;30)$	$C(-30;20;0)$	$P(20;-40;-10)$
$D(30;30;-40)$	в) $D(0;0;40)$	$T(-40;-20;-10)$
$K(0;0;0)$	$E(-20;0;0)$	

2. Определить, какая из точек (рис.12) ближе расположена к плоскости проекций Π_1 , Π_2 , Π_3 - ?

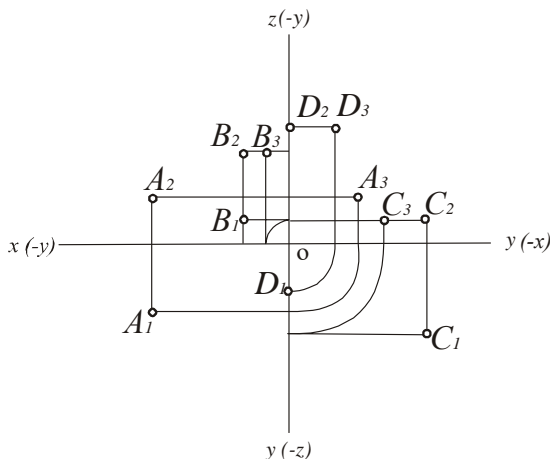
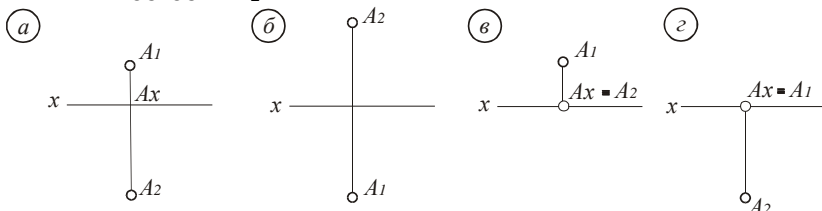


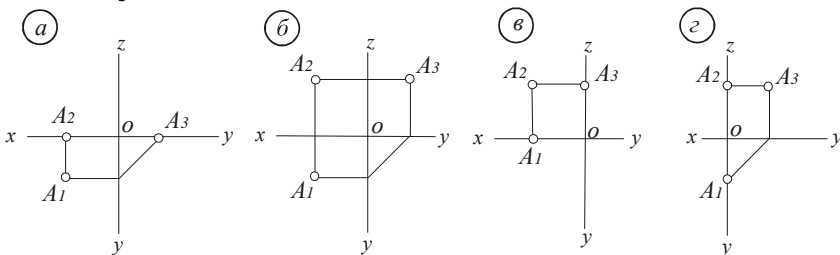
Рис. 12

Тест по теме «Проецирование точки»

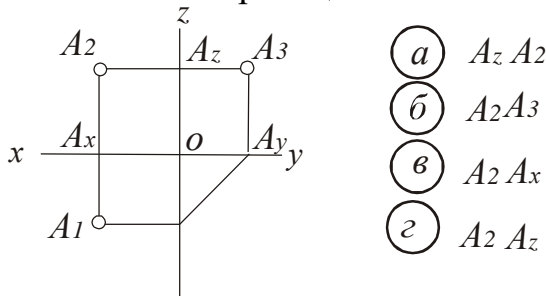
1. На каком чертеже показана точка самая удаленная от плоскости Π_2 ?



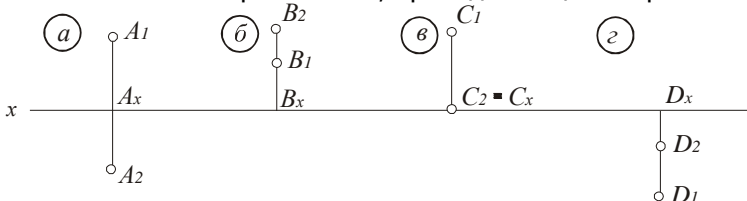
2. Укажите номер чертежа точки, принадлежащей плоскости Π_3 .



3. Какой из перечисленных ниже отрезков равен расстоянию от точка A до горизонтальной плоскости проекций?



4. Укажите чертеж точки, принадлежащей второй четверти.



5. Какая из точек симметрична точке $A(x, y, z)$ относительно плоскости Π_2 .

	A	B	C	D	E
x	10	10	-10	-10	10
y	-15	15	15	-15	15
z	20	-20	20	-20	20

☐ A и C ☐ B и E
☐ B ☐ D и E

ТЕМА 2. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

2.1. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Известно, что положение прямой в пространстве определяется положением двух ее точек. Поэтому для того, **чтобы спроецировать прямую линию, достаточно спроецировать две ее точки и затем соединить полученные одноименные проекции.**

Например (рис. 13), чтобы построить чертеж отрезка прямой AB , следует построить проекции точек A и B , а затем соединить их одноименные проекции, т.е. A_1 соединить с B_1 , A_2 с B_2 , A_3 с B_3 . В результате получают горизонтальную A_1B_1 , фронтальную A_2B_2 и профильную A_3B_3 проекции отрезка прямой AB .

Проекция прямой линии на плоскость в общем случае есть прямая.

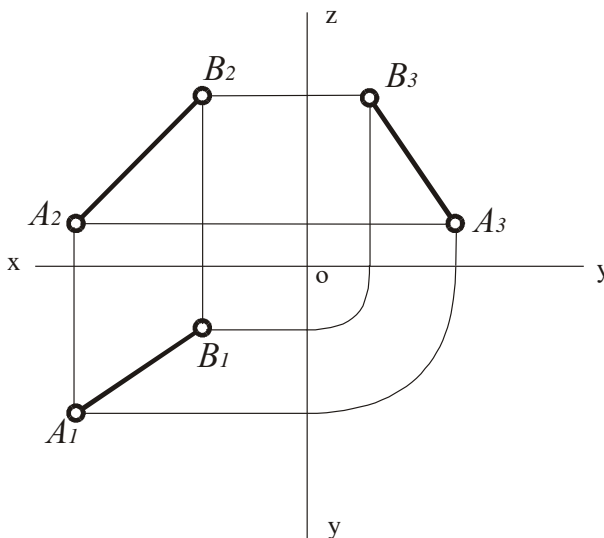


Рис. 13

В зависимости от положения прямой линии относительно плоскостей проекций различают прямые общего и частного положения.

2.2. ПРЯМАЯ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Прямой общего положения называют прямую линию, не параллельную ни одной плоскости проекций.

На рис. 14 приведены наглядное изображение (рис.14,а) и чертеж (рис.14,б) отрезка прямой общего положения АВ. Признаком прямой общего положения на чертеже является то, что ни одна из проекций такой прямой не параллельна осям проекций.

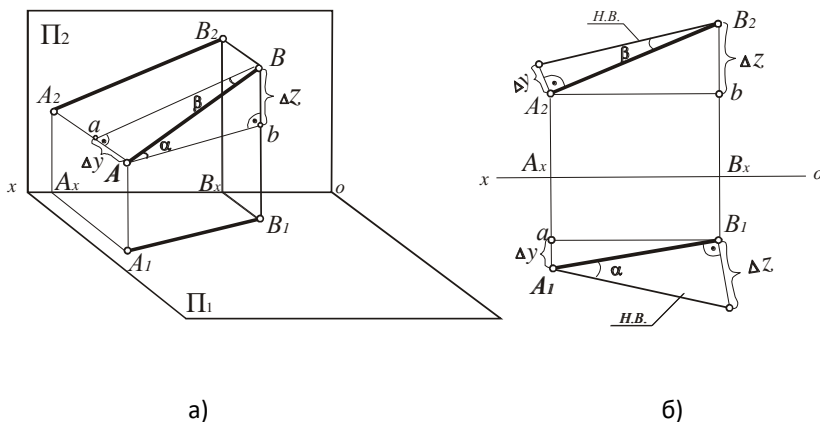


Рис. 14

Угол наклона прямой к горизонтальной плоскости Π_1 , измеряемый между самой прямой и ее горизонтальной проекцией, обозначен буквой " α ".

Угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций Π_2 , измеряемый между самой прямой и ее фронтальной проекцией, обозначен буквой " β ".

Угол наклона прямой к профильной плоскости проекций

Π_3 , измеряемый между самой прямой и ее профильной проекцией, обозначен буквой " γ ".

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ – ПРАВИЛО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Так как прямая общего положения не параллельна ни одной плоскости проекций, то ни на одну плоскость проекций эта прямая не проецируется в свою натуральную величину. То есть, для того чтобы определить натуральный размер отрезка прямой общего положения по имеющемуся его чертежу, необходимо выполнить некоторые дополнительные действия.

На рис. 14 представлены наглядное изображение и чертеж отрезка прямой общего положения АВ. Давайте рассмотрим их более детально. Если на наглядном изображении продлить данный отрезок прямой в одну и в другую стороны, то между самой прямой и соответствующими ее проекциями видны углы наклона прямой линии к плоскостям Π_1 и Π_2 – углы α и β . Из точки А проводят прямую, параллельную горизонтальной проекции отрезка A_1B_1 . Помня, что проецирование параллельное и ортогональное, получаем прямоугольный треугольник АВb. В этом треугольнике гипотенуза АВ есть отрезок прямой в свою натуральную величину, один из катетов Ab равен горизонтальной проекции этого отрезка A_1B_1 , а второй Bb – разности расстояний от точек А и В до горизонтальной плоскости проекций ($BB_1 - AA_1 = \Delta Z$).

Таким образом, натуральная величина отрезка прямой АВ равна величине гипотенузы прямоугольного треугольника, у которого один катет равен горизонтальной проекции отрезка, а второй – разности расстояний от концов отрезка до горизонтальной плоскости проекций.

Чтобы определить натуральную величину отрезка прямой по его чертежу, следует на горизонтальной проекции, как на одном из катетов, построить прямоугольный треугольник. Для этого вначале необходимо определить разность расстояний от концов отрезка до плоскости Π_1 (расстояние от точки А до Π_1 равно отрезку A_2A_x , а от точки В до Π_1 – отрезку B_2B_x , разность расстояний равна $\Delta Z = B_2B_x - A_2A_x$), а затем на перпендикуляре, проведенном из любого конца горизонтальной проекции отрезка, отложить ее величину и соединить полученную точку со свободным концом горизонтальной проекции. Получают прямоугольный треугольник, один из катетов которого есть горизонтальная проекция отрезка прямой, а второй равен разности расстояний от точек А и В до горизонтальной плоскости проекций. В таком случае величина гипотенузы этого треугольника равна натуральной величине отрезка прямой АВ, а угол между гипотенузой и катетом A_1B_1 (горизонтальной проекцией отрезка) – это угол наклона прямой к плоскости Π_1 (угол α).

Аналогично, проводят из точки В прямую Ba , параллельную фронтальной проекции прямой. Получают прямоугольный треугольник, величина гипотенузы которого равна натуральной величине отрезка АВ, один из катетов – это фронтальная проек-

ция отрезка прямой, а второй катет равен разности расстояний от точек А и В до фронтальной плоскости проекций (ΔY). Отсюда следует, что натуральная величина отрезка прямой общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет равен фронтальной проекции отрезка, а второй – разности расстояний от концов отрезка до фронтальной плоскости проекций.

В общем случае правило прямоугольного треугольника можно сформулировать в следующем виде: **натуральная величина отрезка прямой общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция отрезка прямой, а вторым – разность расстояний от концов отрезка до соответствующей плоскости проекций.**

2.4. ПРЯМЫЕ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Прямая параллельная хотя бы одной плоскости проекций называется прямой частного положения.

Прямых частного положения две группы: прямые параллельные одной плоскости проекций и прямые параллельные двум плоскостям проекций. Рассмотрим обе группы.

I. Если прямая параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в натуральную величину и называется такая прямая по имени плоскости, которой параллельна:

а) прямая $AB \parallel$ плоскости P_1 . АВ называется горизонтальной прямой, на горизонтальную плоскость проекций она проеци-

наклона прямой к плоскостям Π_2 и Π_3 (рис. 15);

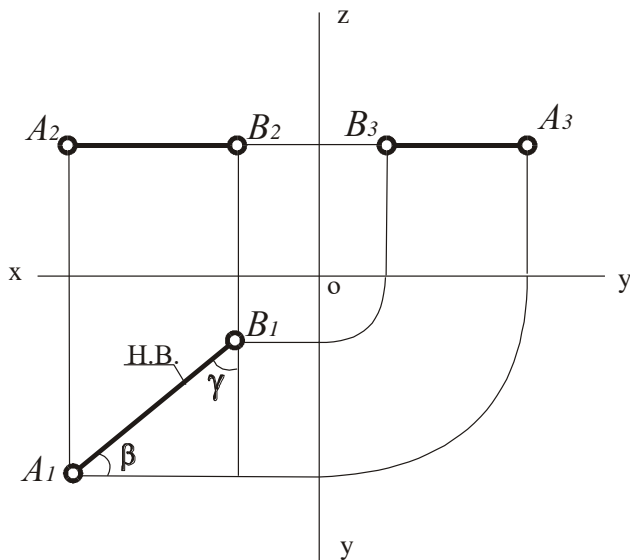


Рис. 15

б) прямая $AB \parallel$ плоскости Π_2 . Прямая AB – фронтальная прямая. На фронтальную плоскость проекций она проецируется в свой натуральный размер, величины углов α и γ – истинные (рис. 16);

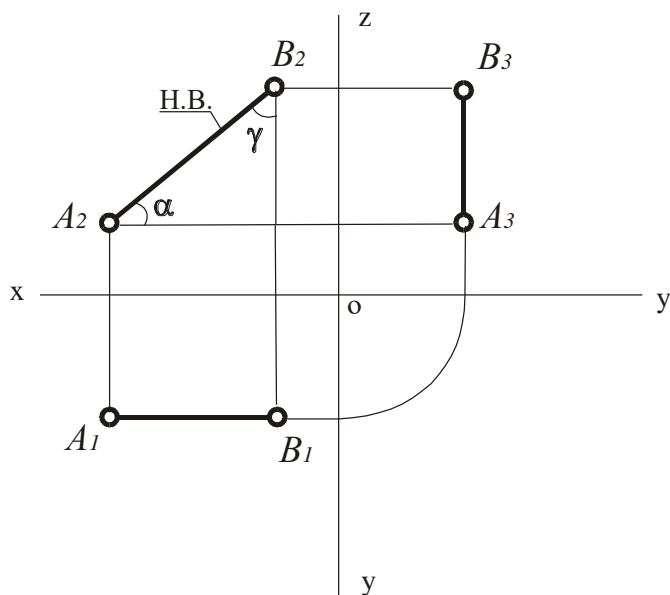


Рис. 16

в) прямая $AB \parallel$ плоскости P_z . Прямая AB – профильная прямая. На профильную плоскость проекций она проецируется в натуральную величину, значения углов α и β истинные (рис. 17).

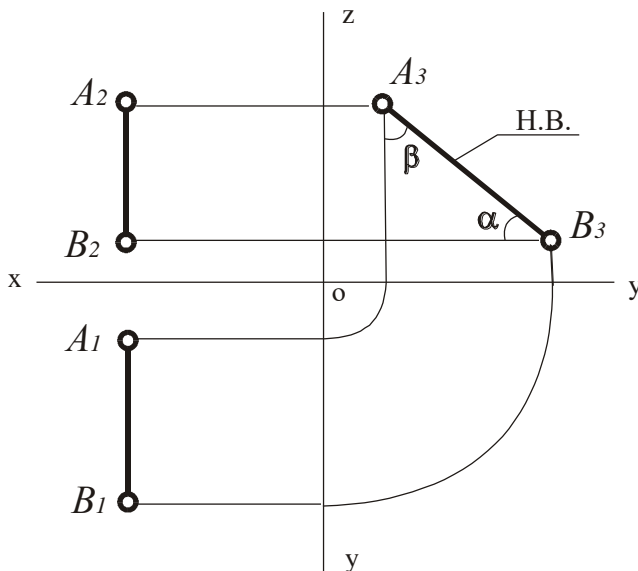


Рис. 17

II. Если прямая параллельна двум плоскостям проекций, то в то же время она перпендикулярна третьей плоскости проекций, т.к. все три плоскости проекций взаимно перпендикулярны.

Прямая, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций, называется проецирующей прямой. На ту плоскость, к которой она перпендикулярна, прямая проецируется в точку. На две другие плоскости проекций, которым прямая параллельна, она проецируется в свой натуральный размер:

а) прямая $AB \perp$ плоскости Π_1 . Прямая AB называется горизонтально проецирующей. Горизонтальная проекция прямой AB – точка ($A_1 \equiv B_1$). Фронтальная A_2B_2 и профильная A_3B_3 проекции – натуральные величины отрезка прямой AB (рис. 18);

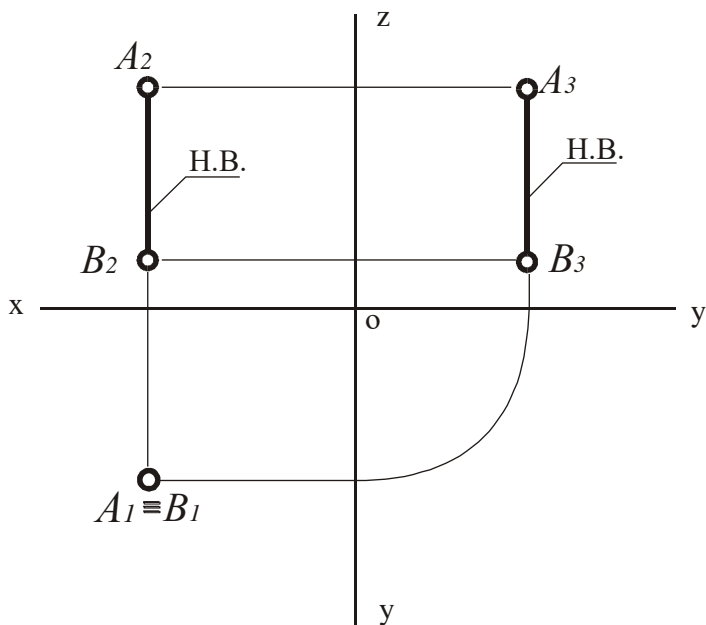


Рис. 18

б) прямая $AB \perp$ плоскости Π_2 . Такая прямая называется фронтально проецирующей. Ее фронтальная проекция A_2B_2 – точка. А на горизонтальную и профильную плоскости проекций прямая проецируется в свою натуральную величину (рис. 19);

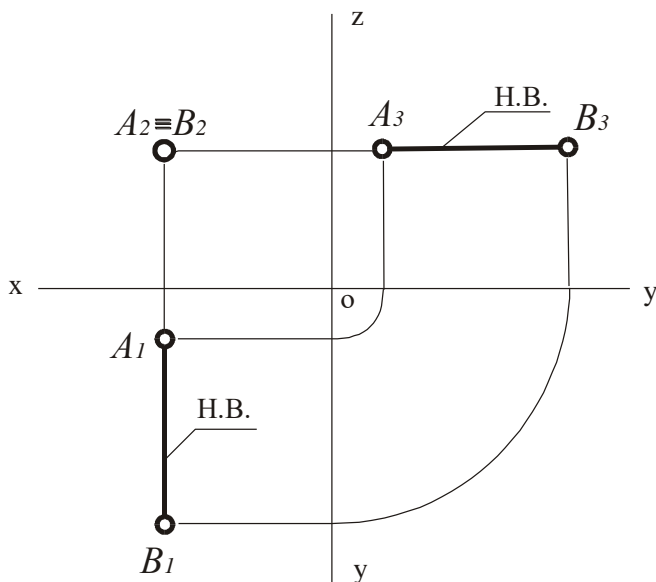


Рис. 19

в) прямая $AB \perp$ плоскости P_3 . Прямая AB – профильно проецирующая. Ее профильная проекция – точка, а величина горизонтальной и фронтальной проекций есть натуральная величина самой прямой (рис. 20).

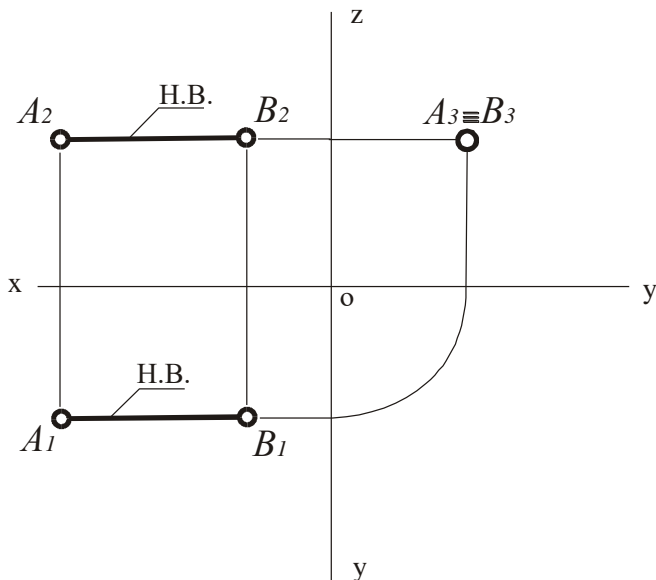


Рис. 20

2.5. СЛЕДЫ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Следом прямой линии называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

Точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций называется горизонтальным следом прямой и обозначается буквой "М".

Точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций называется фронтальным следом прямой и обозначается буквой "N".

Точка пересечения прямой с профильной плоскостью проекций называется профильным следом прямой и обозначается буквой "Р".

В общем случае прямая имеет три следа : горизонтальный (М), фронтальный (N) и профильный (Р).

Прямая, параллельная одной плоскости проекций, имеет

два следа, расположенных в плоскостях, которым она не параллельна.

Прямая, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций, имеет один след, совпадающий с ее проекцией на ту плоскость, которой она перпендикулярна.

Рассмотрим общий случай. Отрезок прямой общего положения АВ расположен в первой четверти пространства (рис. 21).

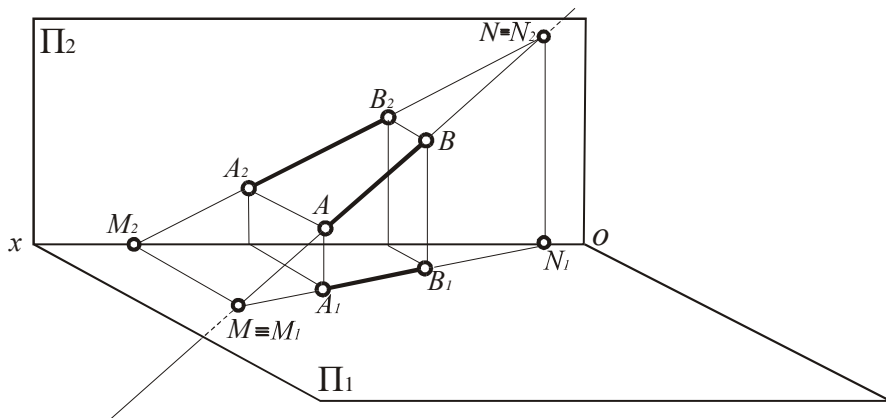


Рис. 21

Данный отрезок продляют в одну и другую стороны до пересечения прямой с плоскостями проекций. При пересечении прямой с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 получают горизонтальный след прямой – точку М. При пересечении прямой с фронтальной плоскостью проекций Π_2 – фронтальный след прямой – точку N. Прямую MN проецируют на горизонтальную и фронтальную плоскости. Точка М принадлежит плоскости Π_1 , поэтому горизонтальная проекция ее будет находиться в самой точке $M \equiv M_1$, а фронтальная проекция горизонтального следа прямой M_2 – на оси проекций X. Точка N (фронтальный след прямой) принадлежит плоскости Π_2 , поэтому ее горизонтальная проекция N_1 будет находиться на оси X, а местоположение фронтальной

проекция совпадет с местоположением самого фронтального следа $N \equiv N_2$. Проекция отрезка прямой АВ будут расположены на соответствующих проекциях прямой MN.

На рис. 22 изображен чертеж прямой MN и ее отрезка АВ. Анализируя его, можно вывести правила построения следов прямой общего положения по имеющемуся чертежу отрезка этой прямой.

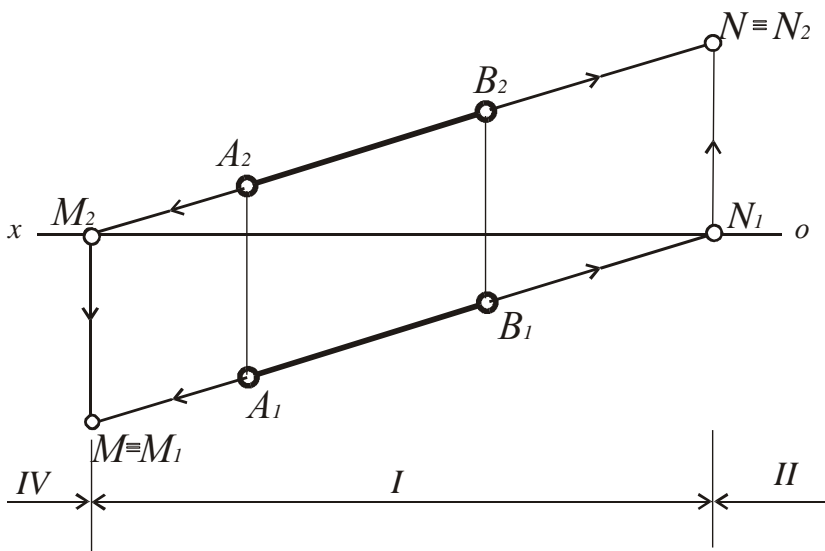


Рис. 22

Для построения горизонтального следа прямой (точки М) необходимо фронтальную проекцию отрезка продлить до пересечения с осью X и из полученной точки восстановить перпендикуляр до пересечения с продолжением горизонтальной проекции отрезка прямой.

Для построения фронтального следа прямой (точки N) необходимо горизонтальную проекцию отрезка продлить до пересечения с осью X и из полученной точки восстановить перпендикуляр до пересечения с продолжением фронтальной проекции отрезка прямой.

Необходимо определить, через какие четверти проходит прямая. На участке от следа M до следа N она находится в первой четверти (горизонтальная проекция прямой ниже оси X , а фронтальная – выше). После того как прямая пересекла плоскость Π_1 в точке M , обе проекции прямой оказываются ниже оси X . Это говорит о том, что на этом участке прямая находится в четвертой четверти. После пересечения прямой плоскости Π_2 в точке N обе ее проекции становятся выше оси X . Это признак того, что прямая перешла во вторую четверть пространства.

А теперь рассмотрим случай, когда отрезок прямой находится в первом октанте пространства, т.е. выполним построение следов прямой линии в системе трех плоскостей проекций (рис. 23, 24).

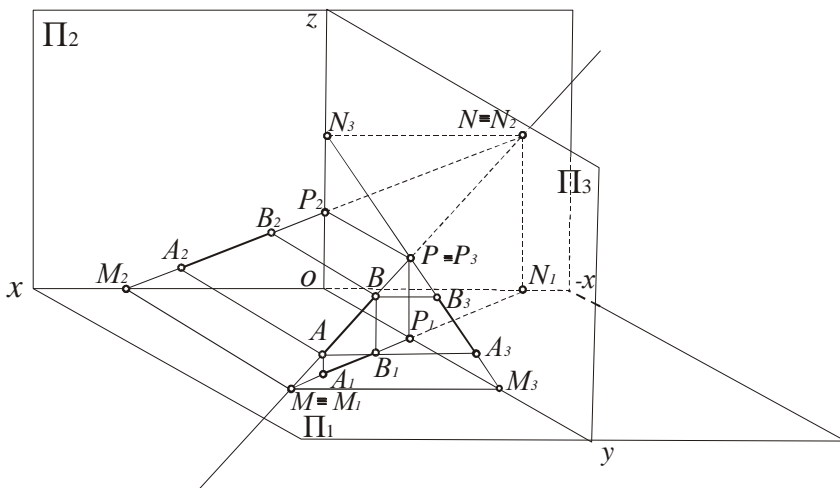


Рис. 23

На первом этапе определяют местоположения горизонтального M (M_1, M_2, M_3) и фронтального N (N_1, N_2, N_3) следов прямой. Затем строят профильную проекцию прямой MN . Соеди-

няют профильные проекции горизонтального и фронтального следов прямой (M_3 и N_3). На ней выделяют профильную проекцию отрезка АВ.

После этого приступают к построению профильного следа прямой Р. Горизонтальная проекция профильного следа P_1 лежит на пересечении горизонтальной проекции прямой с осью Y, фронтальная проекция профильного следа P_2 – на пересечении фронтальной проекции прямой с осью Z. По двум известным проекциям точки Р строят ее профильную проекцию и совпадающий с ней сам профильный след Р (точка Р принадлежит плоскости Π_3 , поэтому ее профильная проекция совпадает с ней самой, а две другие проекции лежат на осях проекций).

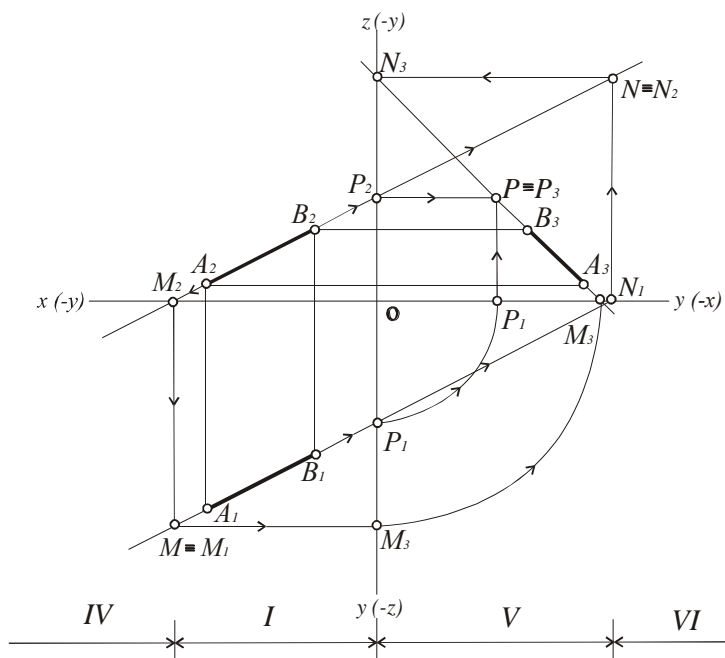


Рис. 24

Следует обратить внимание на тот факт, что горизонтальный след прямой (точка М) всегда будет находиться на горизонтальной проекции прямой, фронтальный след (точка N) – на фронтальной проекции прямой, а профильный след (точка Р) – на профильной проекции прямой.

Затем определяют, через какие октанты проходит прямая. На участке от следа М до профильной плоскости прямая находится в первом октанте (горизонтальная проекция прямой ниже оси X , фронтальная – выше, $X > 0$). Левее следа М прямая расположена в четвертом октанте (обе проекции прямой ниже оси X , $X < 0$). На участке от осей Y и Z до фронтального следа N прямая проходит в пятом октанте (горизонтальная проекция прямой ниже оси X , фронтальная – выше, $X < 0$). И наконец, правее следа N прямая находится в шестом октанте (обе проекции выше оси X , $X < 0$).

2.6. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Если точка принадлежит прямой линии, то ее проекции лежат на одноименных проекциях прямой (рис. 25).

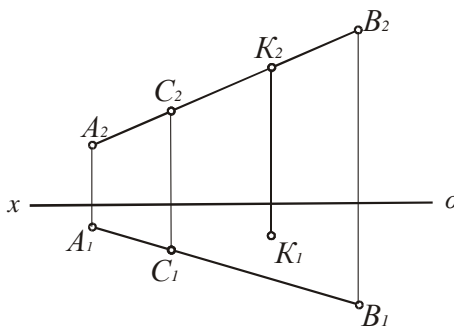


Рис. 25

Точка С принадлежит прямой АВ, так как ее проекции лежат на одноименных проекциях прямой, точка К не принадлежит прямой АВ.

2.7. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Две прямые в пространстве относительно друг друга могут быть расположены следующим образом :

а) прямые могут быть параллельны между собой. Признак таких прямых на чертеже – их одноименные проекции параллельны (рис. 26);

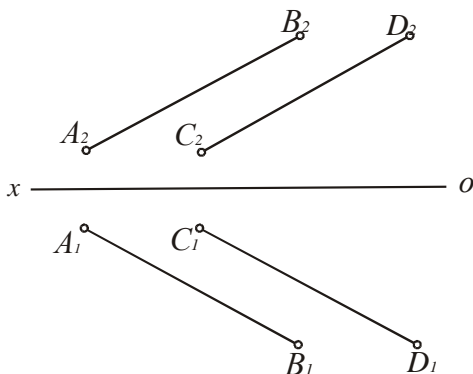


Рис. 26

б) прямые могут пересекаться. Признак пересекающихся прямых на чертеже - их одноименные проекции также пересекаются, причем проекции точки пересечения прямых лежат на одной линии связи (рис. 27);

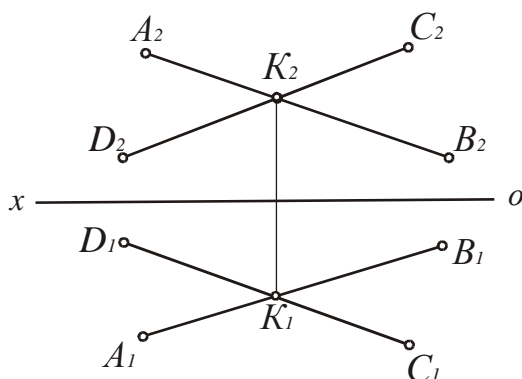


Рис. 27

в) прямые могут скрещиваться в пространстве. Признак скрещивающихся прямых - точки кажущегося пересечения одноименных проекций прямых не лежат на одной линии связи (рис. 28).

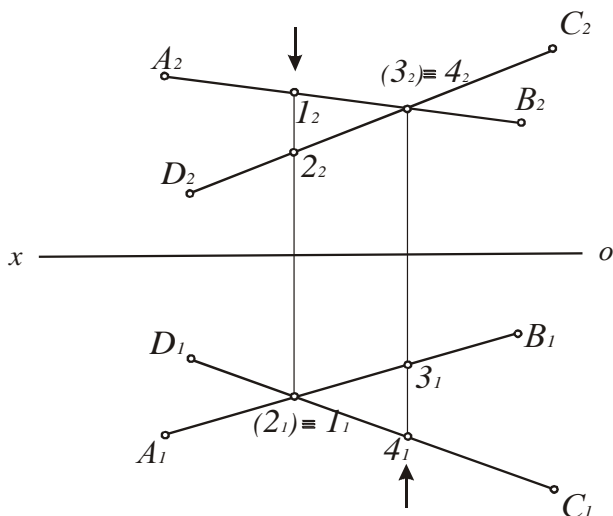


Рис. 28

Точки 1 и 2, 3 и 4 называются конкурирующими точками. При их помощи можно определять видимость элементов изображаемого объема. Остановимся на этом более подробно. Пусть точка 1 принадлежит прямой AB, точка 2 - прямой CD. Так как фронтальная проекция точки 1 выше фронтальной проекции точки 2, точка 1 ближе к наблюдателю и, следовательно, прямая AB на виде сверху перекрывает прямую CD. Допустим, что точка 3 принадлежит прямой AB, а точка 4 - прямой CD. Горизонтальная проекция точки 4 расположена ближе к наблюдателю, чем горизонтальная проекция точки 3, следовательно, на фронтальном виде прямая CD перекрывает прямую AB.

2.8. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПРЯМОГО УГЛА

Если две прямые в пространстве пересекаются под прямым углом, то в общем случае их проекции образуют угол, не равный 90° .

Если же одна сторона прямого угла параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость прямой угол проецируется в натуральную величину (рис.29).

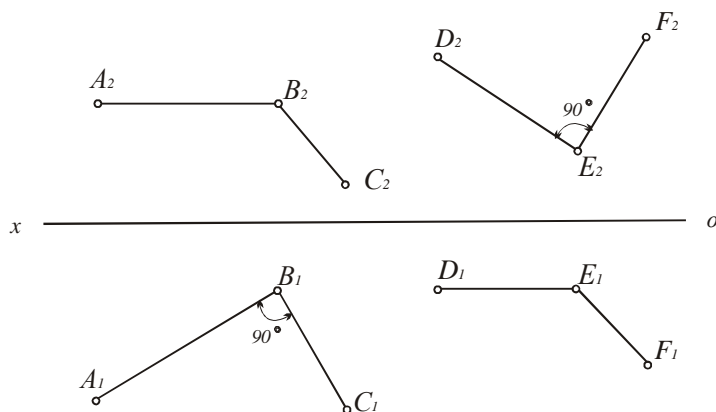


Рис. 29

Вопросы для самопроверки по теме «Проецирование прямой линии».

1. Как задать положение прямой в пространстве и построить ее чертеж?
2. Какие прямые называются прямыми общего положения? Каковы их признаки на чертеже?
3. Какие прямые называются прямыми частного положения? Каковы их признаки на чертеже?
4. Сколько прямых частного положения Вы знаете? Назовите их.
5. В чем заключается метод прямоугольного треугольника? Как определить угол наклона прямой к плоскости проекций?
6. Что называется следом прямой линии?
7. Сколько следов в общем случае имеет прямая?
8. Сформулируйте общий принцип построения следов прямой линии.
9. Как построить профильный след прямой?
10. Как определить через какие октанты пространства проходит прямая?
11. Назовите признак принадлежности точки прямой линии.
12. Назовите возможные относительные положения прямых линий?
13. Как определить видимость точек на чертеже? (Метод конкурирующих точек).
14. В каком случае прямой угол проецируется на одну из плоскостей проекций в натуральную величину?

Задачи для самостоятельной работы по теме «Проецирование прямой линии»

Прямая общего положения

1. Построить чертеж прямой АВ по следующим данным:

а) $A(10;40;20)$

$B(30;20;50)$

б) точка А принадлежит оси Z и находится на расстоянии 4 см от плоскости Π_1 , точка В принадлежит плоскости Π_1 и находится на расстоянии 5 см от Π_2 и 4 см от Π_3 .

Прямые частного положения

2. Построить чертеж прямой:

а) $AB \parallel \Pi_2, \alpha = 30^\circ, AB = 2 \text{ см}, A(10; 5; 15),$

б) $CD \parallel \Pi_3, \beta = 45^\circ, CD = 1 \text{ см}, C(20;30;0),$

в) $EF \parallel \Pi_1, \gamma = 60^\circ, EF = 30 \text{ см}, E(40, 15, 25),$

г) $KT \perp \Pi_1, KT = 2 \text{ см}, K(0;20 \ 35).$

Натуральная величина отрезка прямой общего положения

3. Определить натуральную величину отрезка АВ и углы его наклона к плоскостям проекций (рис.30).

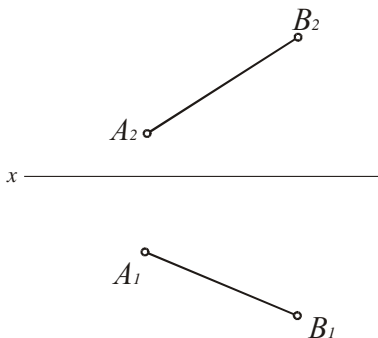
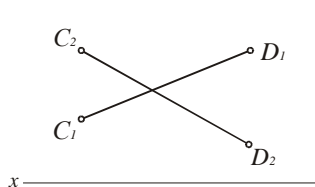
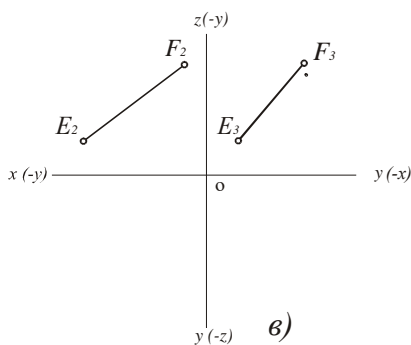


Рис. 30

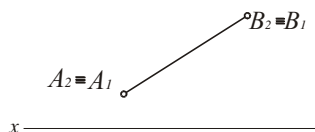
4. Определить натуральную величину отрезка и углы его наклона к плоскостям проекций (рис. 31, а, б, в, г).



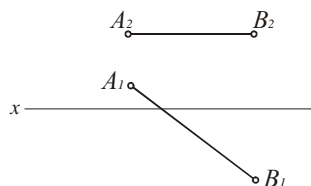
б)



в)



г)



д)

Рис. 31

5. Определить длину ломаной, охарактеризовать каждый участок (рис. 32).

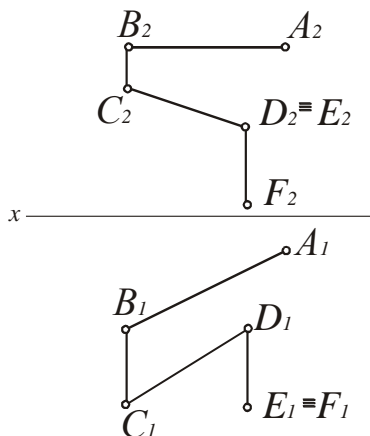


Рис. 32

Следы прямой линии

6. Найти следы M, N прямой общего положения, определить через какие четверти она проходит (рис 33).

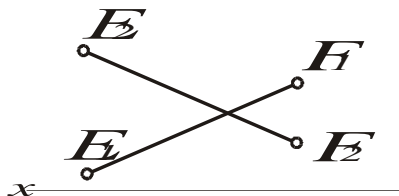


Рис. 33

7. Построить чертёж прямой, зная положение ее следов. Описать ее положение в пространстве (рис. 34).

M_o

x ————— o

oN

Рис. 34

Взаимное положение прямых

8. Дана прямая АВ и точка С (рис. 35).

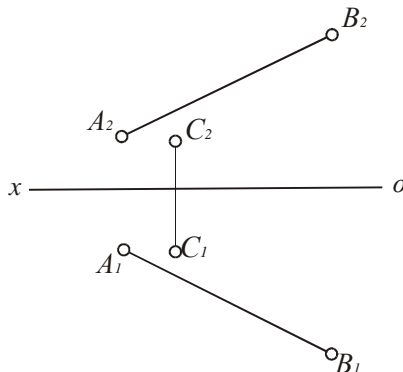


Рис. 35

Провести через точку С прямую:

- а) параллельную АВ;
 - б) пересекающую АВ;
 - в) скрещивающуюся с АВ.
9. Охарактеризовать данные прямые, приведенные на рис.36,а,б,в.

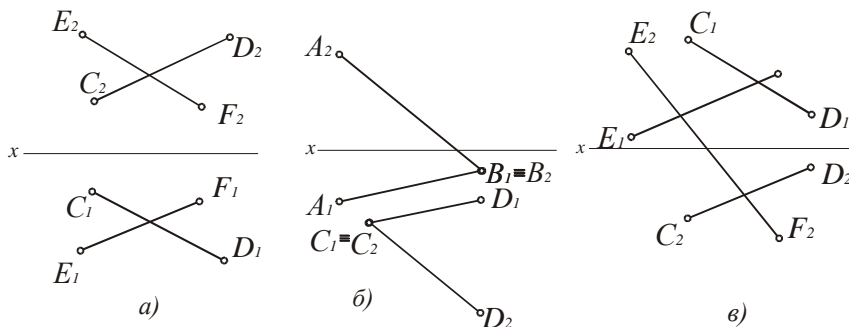


Рис.36

10. Определить натуральную величину расстояния от точки до прямой (рис.37).

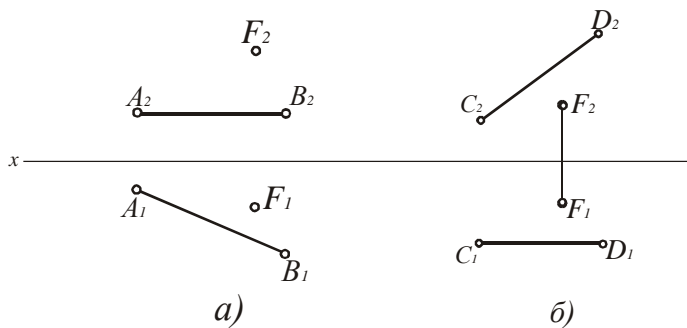
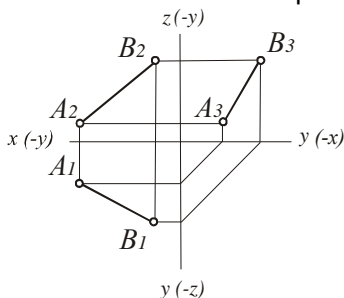


Рис. 37

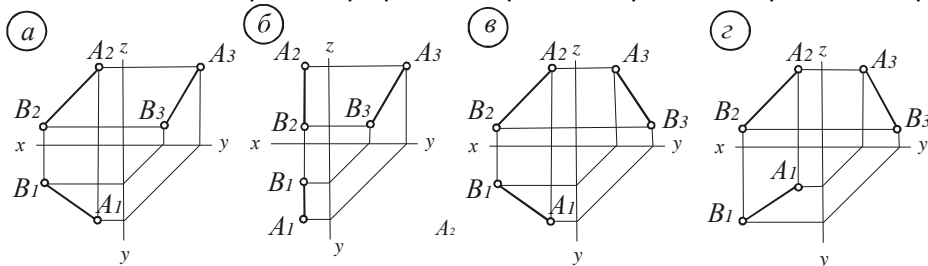
Тест по теме «Проецирование прямой линии»

1. Как называется прямая?

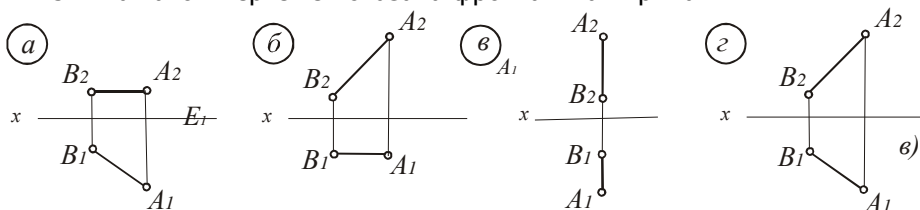


- ☐ а -профильная прямая,
- ☐ б -прямая общего положения,
- ☐ в -фронтальная прямая,
- ☐ г -горизонтально-проецирующая прямая

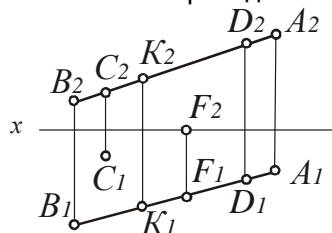
2. На каком чертеже профильная проекция прямой построена не верно?



3. На каком чертеже показана фронтальная прямая?

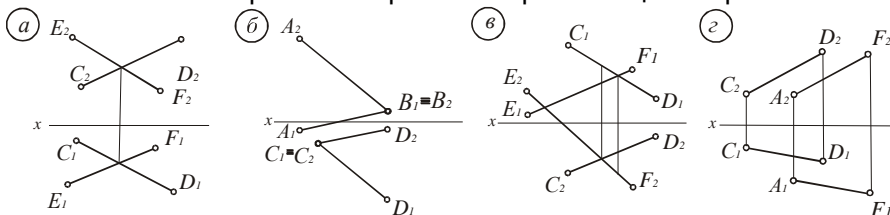


4. Какая из точек принадлежит прямой АВ?



- ☐ а Точка С
- ☐ б Точка D
- ☐ в Точка F
- ☐ г Точка K

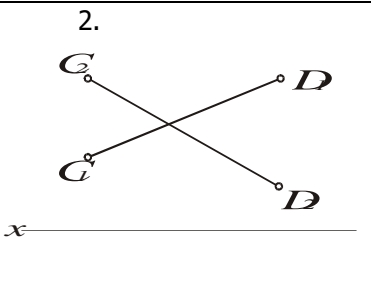
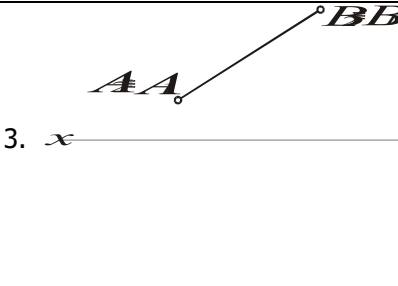
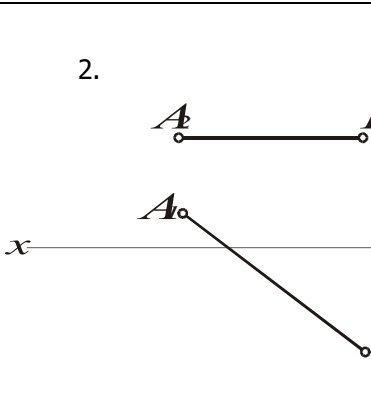
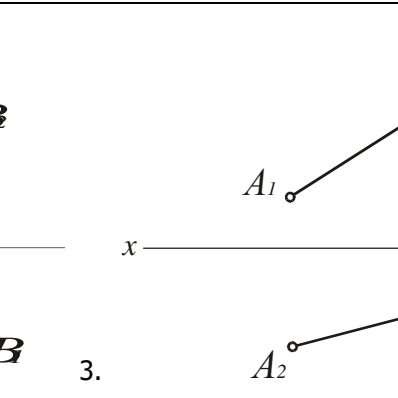
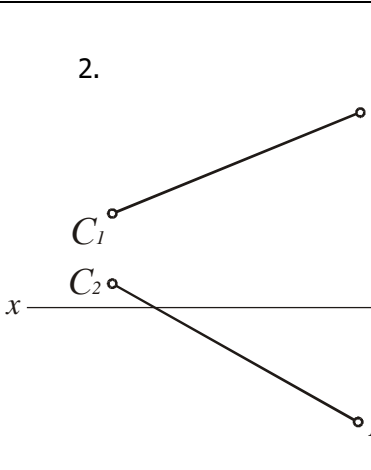
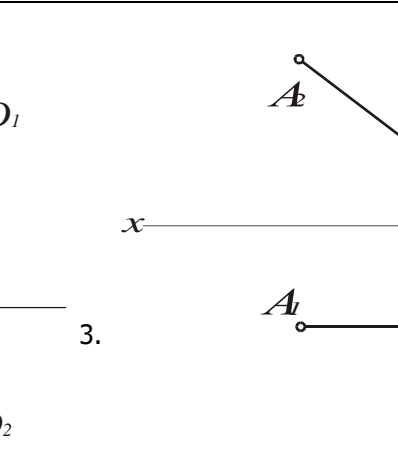
5. На каком чертеже изображены пересекающиеся прямые?

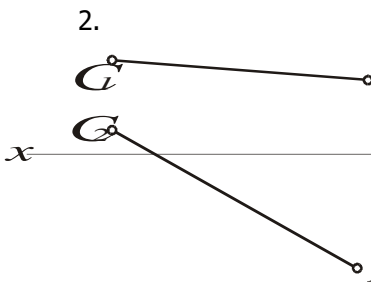
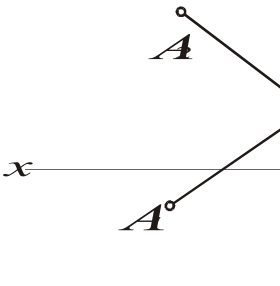
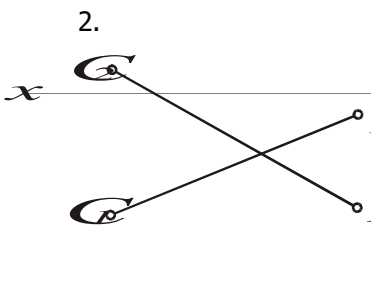
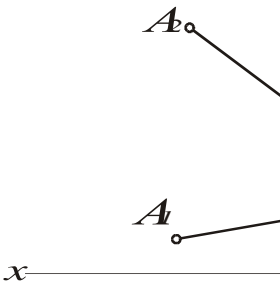
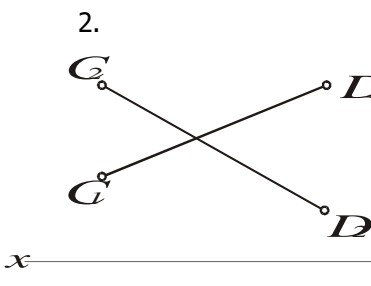
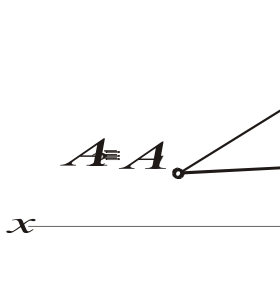


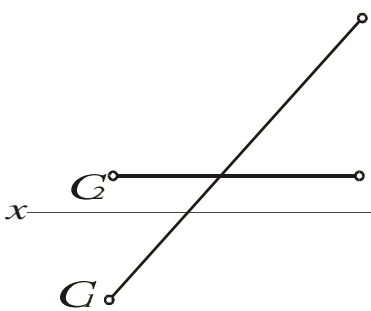
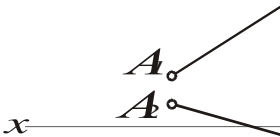
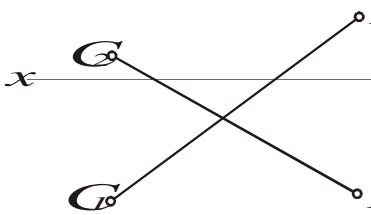
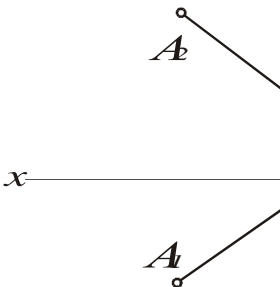
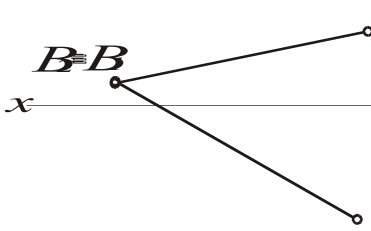
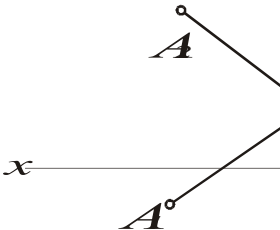
Контрольная работа по темам «Проецирование точки», «Проецирование прямой линии»

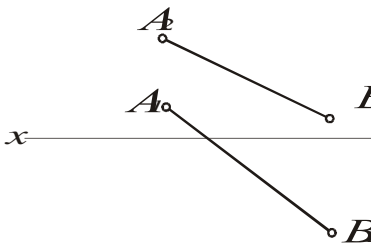
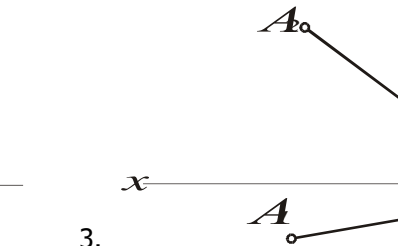
Задание

1. Построить чертеж точки по заданным координатам. Определить расстояния от точки до плоскостей и осей проекций. Определить положение точки в пространстве.
2. Найти следы прямой, определить через какие четверти она проходит.
3. Найти натуральную величину прямой и углы ее наклона к плоскостям проекций.

<p>1 Вариант</p> <p>1 $A(10;-25;40);$</p> <p>$B(0;45;-30);$</p> <p>$C(25;0;0).$</p>	<p>2.</p> 	 <p>3. x</p>
<p>2 Вариант</p> <p>1. $A(-40;-50;-30);$</p> <p>$B(-20;-30;0);$</p> <p>$C(0;0;-45).$</p>	<p>2.</p> 	 <p>3. x</p>
<p>3 Вариант</p> <p>1. $A(-20;-25;35);$</p> <p>$B(20;-40;0);$</p> <p>$C(0;20;0).$</p>	<p>2.</p> 	 <p>3. x</p>

<p>4 Вариант</p> <p>1. A(-20;25;-35);</p> <p>B(-25;30;0);</p> <p>C(0;40;0).</p>	<p>2.</p> 	<p>3.</p> 
<p>5 Вариант</p> <p>1. A(30;-25;-60);</p> <p>B(-40;-20;0);</p> <p>C(0;0;-35).</p>	<p>2.</p> 	<p>3. x</p> 
<p>6 Вариант</p> <p>1. A(10;-10;50);</p> <p>B(0;30;-40);</p> <p>C(0;0;-50).</p>	<p>2.</p> 	<p>3. x</p> 

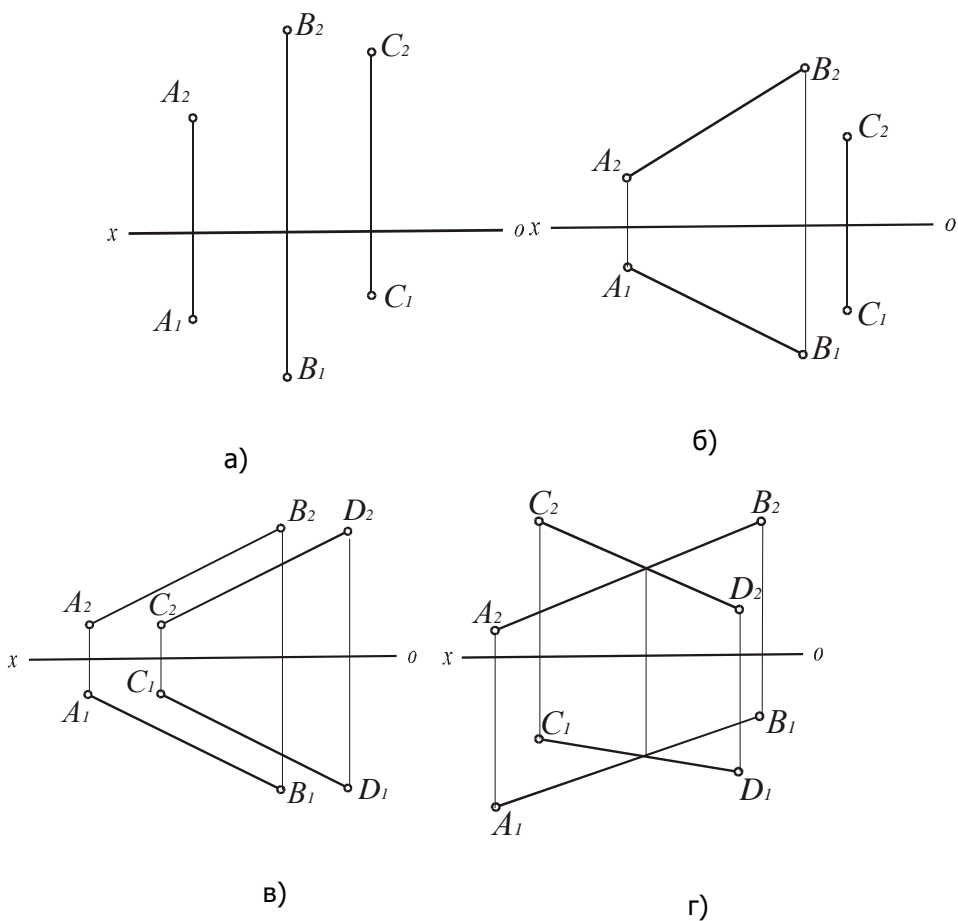
<p>7 Вариант</p> <p>1. A(- 25;35;-20); B(30;- 30;0); C(- 50;0;0).</p>	<p>2.</p> 	<p>3.</p> 
<p>8 Вариант</p> <p>1. A(- 30;50;-40); B(- 20;45;0); C(- 30;0;0).</p>	<p>2.</p> 	<p>3.</p> 
<p>9 Вариант</p> <p>1. A(25;25;-25); B(0;- 20;40); C(0;35;0).</p>	<p>2.</p> 	<p>3.</p> 

<p>10 Вариант</p> <p>1.</p> <p>$A(25;30;10);$</p> <p>$B(45;0;20);$</p> <p>$C(0;0;35).$</p>	<p>2.</p> 	<p>3.</p> 
---	---	--

ТЕМА 3. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ

3.1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

Положение плоскости на чертеже может быть задано (рис.38):



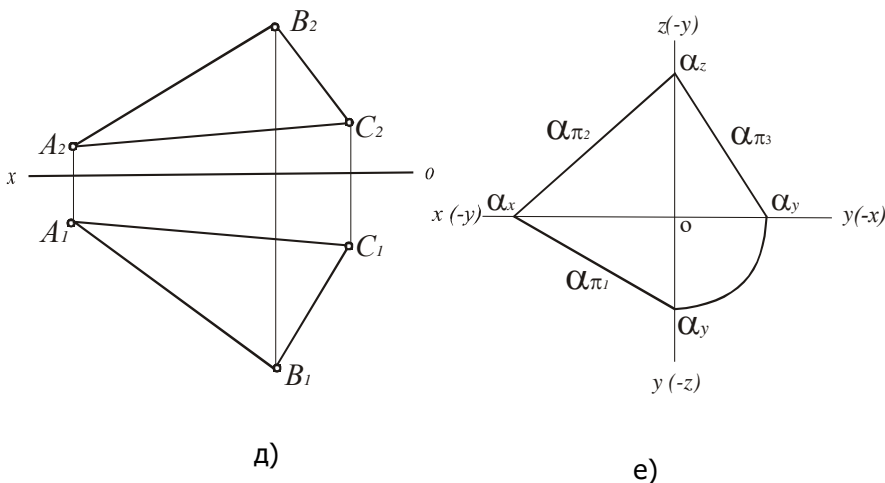


Рис. 38

а) тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 38,а); б) прямой и точкой, не лежащей на этой прямой (рис. 38,б); в) двумя параллельными прямыми (рис. 38,в); г) двумя пересекающимися прямыми (рис. 38,г); д) плоской фигурой (рис. 38,д); е) следами (рис.38,е, 39).

След плоскости – это линия пересечения плоскости α с плоскостью проекций.

На рис. 39 показаны наглядное изображение (рис.39,а) плоскости α и ее чертеж (рис 39,б):

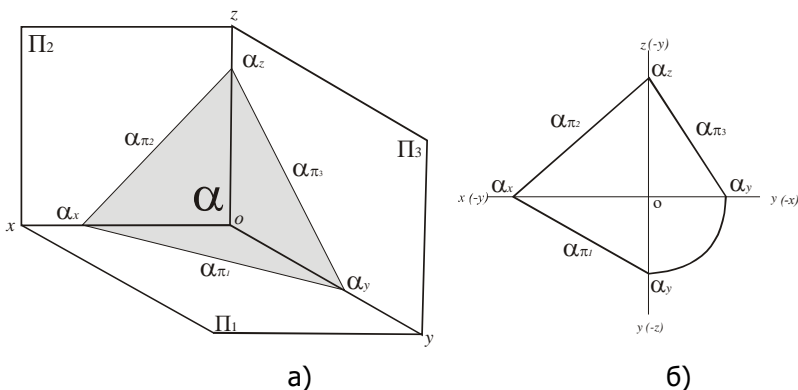


Рис. 39

$-\alpha\Pi_1$, $\alpha\Pi_2$, $\alpha\Pi_3$ – горизонтальный , фронтальный и профильный следы плоскости α .

$-\alpha X$, αY , αZ – точки схода следов.

3.2. ПЛОСКОСТЬ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

В зависимости от расположения относительно плоскостей проекций плоскости могут быть общего положения и частного.

Плоскость общего положения – это плоскость, не перпендикулярная ни одной плоскости проекций.

Признак такой плоскости на чертеже: а) в случае, когда плоскость задана следами, – ее следы не параллельны осям проекций; б) в случае задания плоскости иным способом – ни одна проекция плоскости не вырождается в линию. Примером плоскости общего положения могут служить плоскости, изображенные на рис. 38 и 39.

3.3. ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Плоскости частного положения – это плоскости, перпендикулярные одной или двум плоскостям проекций.

Первая группа плоскостей частного положения: плоскости, перпендикулярные одной плоскости проекций, - проецирующие плоскости.

Горизонтально-проецирующая плоскость – это плоскость, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций (рис. 40, а, б, в).

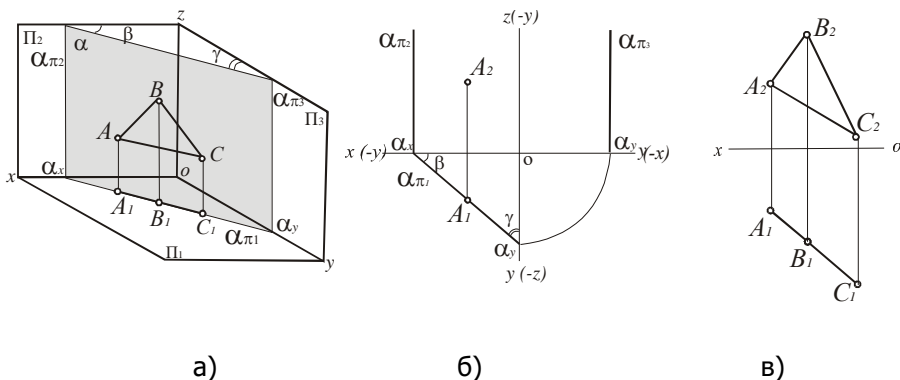


Рис. 40

На чертеже горизонтально-проецирующей плоскости ее фронтальный след расположен перпендикулярно оси ОХ, профильный – перпендикулярно оси ОУ, а горизонтальный след образует с осями ОХ и ОУ углы, равные углам наклона этой плоскости к фронтальной β и профильной γ плоскостям проекций. Горизонтальный след такой плоскости обладает собирательным свойством, т.е. горизонтальные проекции всех точек, принадлежащих плоскости α , находятся на ее горизонтальном следе $\alpha\pi_1$.

Фронтально-проецирующая плоскость – это плоскость, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций (рис.41,а,б,в).

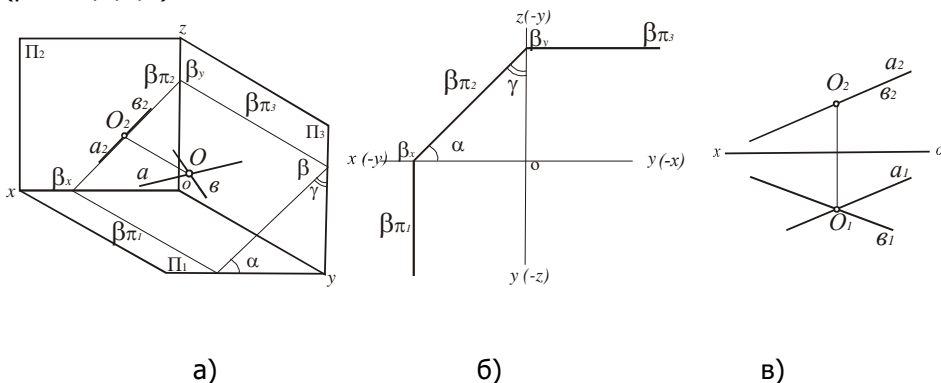


Рис. 41

На чертеже фронтально-проецирующей плоскости ее горизонтальный след перпендикулярен оси OX , профильный след – перпендикулярен оси OZ . Фронтальный след образует с осью OX угол α , равный углу наклона такой плоскости к горизонтальной плоскости проекций, а с осью OZ – угол γ , равный углу наклона данной плоскости к профильной плоскости проекций. При этом фронтальный след фронтально-проецирующей плоскости обладает собирательным свойством: фронтальные проекции всех точек, принадлежащих такой плоскости, находятся на ее фронтальном следе.

Профильно-проецирующая плоскость – это плоскость, перпендикулярная к профильной плоскости проекций (рис. 42, а, б, в).

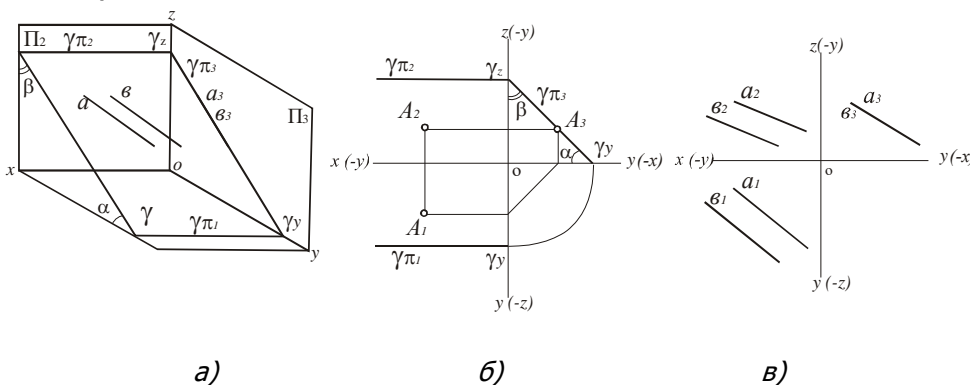


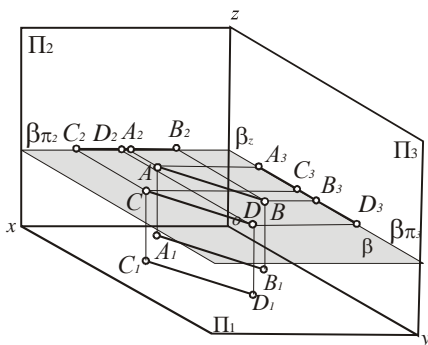
Рис. 42

Горизонтальный и фронтальный следы такой плоскости перпендикулярны соответственно осям OX и OY . Профильный след образует с указанными осями углы α и β , равные углам наклона рассматриваемой плоскости к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций. У такой плоскости собирательным свойством обладает профильный след – профильные проекции всех точек, принадлежащих этой плоскости, находятся на ее профильном следе.

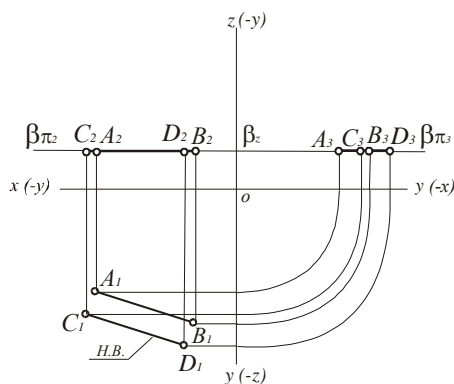
Вторая группа плоскостей частного положения – плоскости уровня или плоскости двойного проецирования. К ним относятся плоскости, перпендикулярные двум плоскостям проекций или, что равносильно, параллельные третьей плоскости проекций. Рассмотрим их подробнее.

Горизонтальная плоскость уровня – это плоскость, перпендикулярная фронтальной и профильной плоскостям проекций и тем самым параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис.43,а,б).

Горизонтальная плоскость уровня не имеет горизонтального следа, т.к. параллельна плоскости Π_1 . Фронтальный и профильный ее следы параллельны осям OX и OY и обладают собирательными свойствами, поскольку по отношению к Π_2 и Π_3 данная плоскость является проецирующей.



а)



б)

Рис. 43

Фронтальная плоскость уровня – это плоскость, перпендикулярная к горизонтальной и профильной плоскостям проекций и параллельная фронтальной плоскости проекций (рис. 44,а,б).

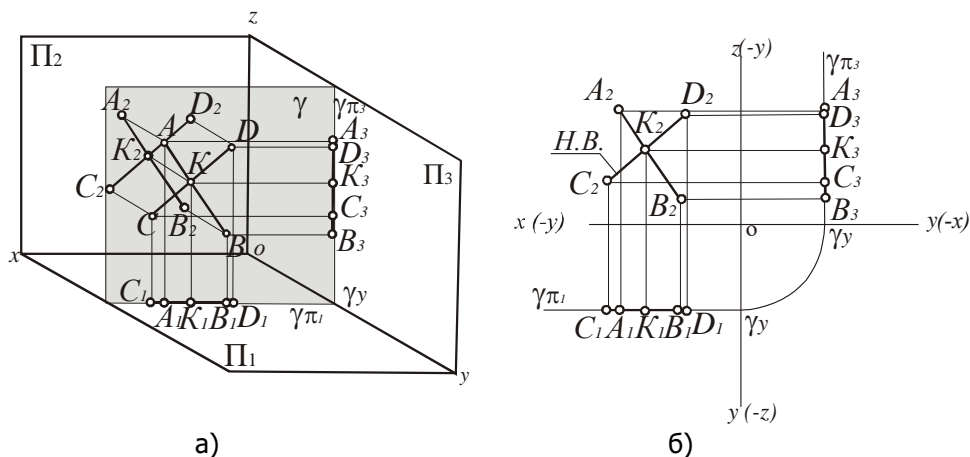


Рис. 44

Фронтальная плоскость уровня не имеет фронтального следа, т.к. она параллельна плоскости Π_2 . Горизонтальный и профильный следы такой плоскости параллельны осям OX и OZ соответственно. Эти следы обладают собирательными свойствами, т.к. по отношению к плоскостям Π_1 и Π_3 фронтальная плоскость уровня является проецирующей.

Профильная плоскость уровня – это плоскость, перпендикулярна к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций и параллельна профильной плоскости проекций (рис. 45,а,б).

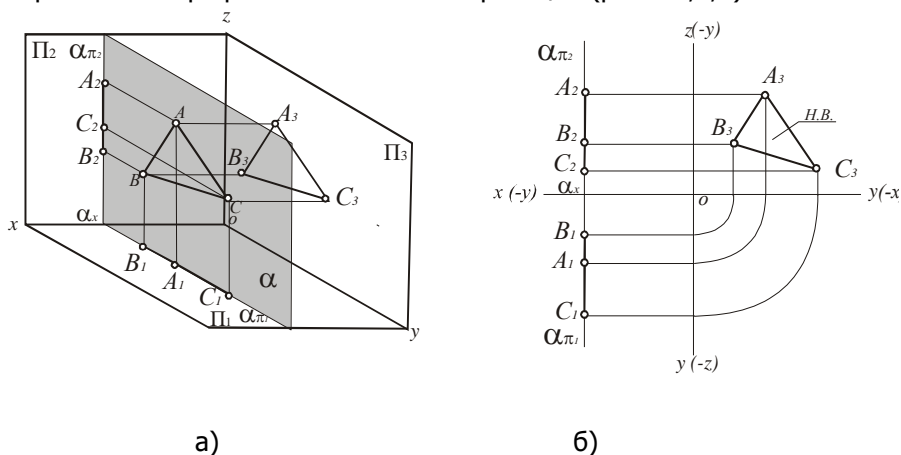


Рис. 45

Профильная плоскость уровня не имеет профильного следа, а ее горизонтальный и фронтальный следы обладают собирательным свойством и на чертеже расположены параллельно оси OX .

3.4. ТОЧКА И ПРЯМАЯ В ПЛОСКОСТИ

3.4.1. Прямая общего положения в плоскости общего положения

На рис. 46,а изображены плоскость общего положения α , заданная следами, и лежащая в ней прямая общего положения.

Прямая вместе с плоскостью α пересекает плоскости проекций Π_1 и Π_2 . Точки пересечения прямой с плоскостями проекций – это следы прямой M и N , а линии пересечения плоскости α с плоскостями проекций – это следы плоскости $\alpha\Pi_1$ и $\alpha\Pi_2$. Следовательно, если прямая принадлежит плоскости, ее следы лежат на одноименных следах плоскости. Спроецировав точки M и N и соединив их одноименные проекции, получают чертеж прямой общего положения, лежащей в плоскости общего положения (рис.46,б).

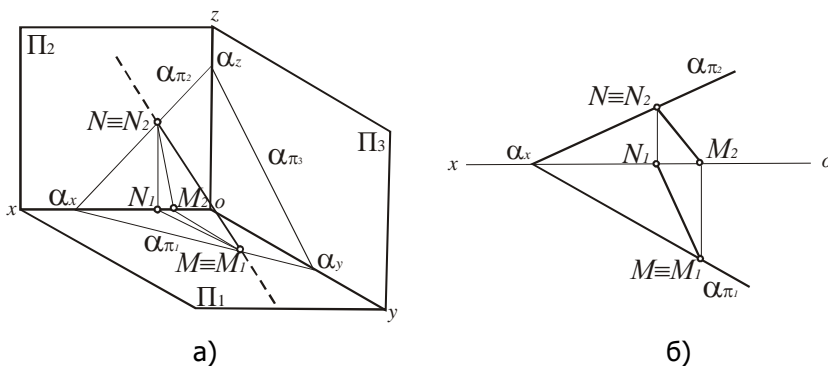


Рис. 46

3.4.2. Прямые частного положения в плоскостях общего положения

К наиболее часто используемым прямым частного положения, лежащим в различных плоскостях, относятся горизонтали и фронтоли. Рассмотрим их последовательно.

Прямая, принадлежащая плоскости α и параллельная горизонтальной плоскости проекций, называется горизонталью плоскости α .

На рис. 47, а, б изображены плоскость общего положения α и ее горизонталь NP .

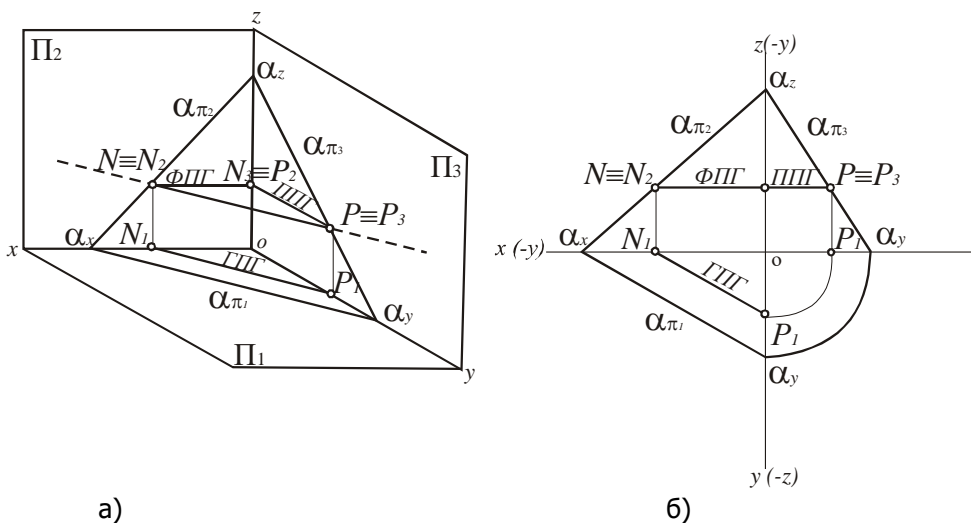


Рис. 47

Горизонталь имеет фронтальный след N и профильный P , которые лежат на одноименных следах плоскости. Так как прямая NP параллельна плоскости Π_1 , горизонтального следа y у нее нет, фронтальная и профильная ее проекции параллельны осям OX и OY соответственно. Горизонтальная проекция горизонтали NP всегда параллельна горизонтальному следу плоскости, которой она принадлежит.

На рис. 48,а,б изображена плоскость общего положения с ее фронталью МР.

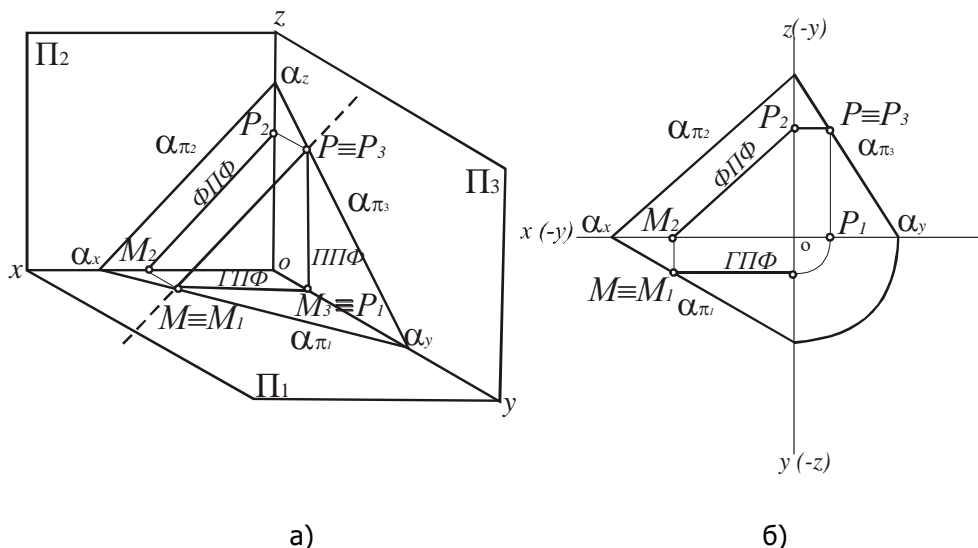


Рис. 48

Прямая, принадлежащая плоскости α и параллельная фронтальной плоскости проекций, называется фронталью плоскости α .

Фронталь не имеет фронтального следа, у нее есть только горизонтальный след М и профильный Р. Прямая МР параллельна плоскости Π_2 , следовательно, ее горизонтальная и профильная проекции параллельны осям ОХ и ОZ соответственно. Фронтальная проекция фронтали всегда параллельна фронтальному следу плоскости, которой она принадлежит.

3.4.3. Линия наибольшего наклона плоскости

Плоскости общего положения – это плоскости, не перпендикулярные ни одной из плоскостей проекций, т.е. значения углов наклона таких плоскостей к плоскостям проекций могут быть различными, но не кратными 90° . Для определения углов наклона какой-либо плоскости к той или иной плоскости проекций

служат линии наибольшего наклона плоскости.

Линиями наибольшего наклона плоскости α к плоскостям проекций Π_1 , Π_2 , Π_3 называются прямые, лежащие в ней и перпендикулярные соответственно к горизонталям, фронталям или профильным прямым.

Пример 3.1. Плоскость общего положения α задана следами. Требуется определить угол наклона данной плоскости к горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 49).

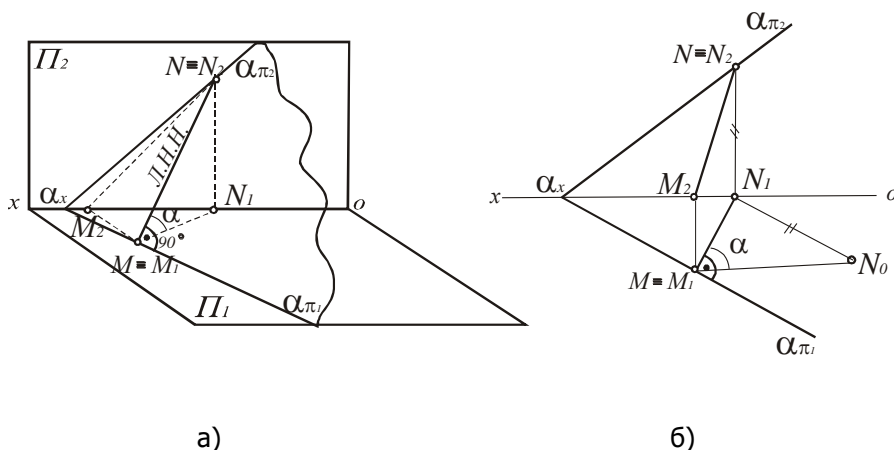


Рис. 49

Для определения угла наклона плоскости α к плоскости проекций Π_1 следует провести линию наибольшего наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций. Эта линия должна быть перпендикулярной к горизонтали плоскости α , а следовательно, учитывая правило проецирования прямого угла, горизонтальная проекция линии наибольшего наклона к плоскости Π_1 должна быть перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости α . В свою очередь, горизонтальная проекция горизонтали плоскости α параллельна горизонтальному следу плоскости $\alpha\Pi_1$. Таким образом, для того чтобы на чертеже провести в плоскости α линию ее наибольшего наклона к Π_1 , следует

провести любую прямую, принадлежащую плоскости α , горизонтальная проекция которой будет перпендикулярна горизонтальному следу заданной плоскости. В нашем случае прямая MN принадлежит α и перпендикулярна $\alpha\Pi_1$ (рис. 56, а, б). Используя правило прямоугольного треугольника, определяют натуральную величину отрезка прямой MN . Угол между натуральной величиной прямой MN и ее горизонтальной проекцией M_1N_1 и есть искомый угол наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций.

Пример 3.2. Плоскость общего положения задана треугольником ABC . Требуется определить угол наклона заданной плоскости к фронтальной плоскости проекций (рис.50).

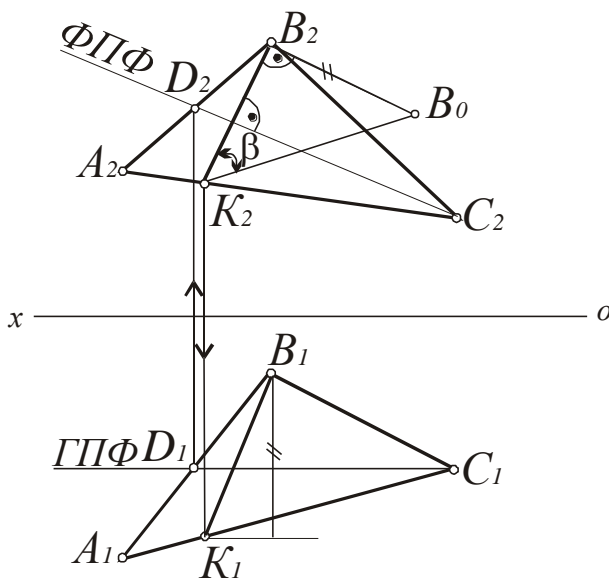


Рис. 50

Прямая наибольшего наклона плоскости ABC к плоскости Π_2 это прямая, принадлежащая ABC и перпендикулярная к фронту этой плоскости, другими словами между прямой наибольшего наклона плоскости и фронталью должен быть прямой угол.

Правило проецирования прямого угла гласит: если одна из сторон такого угла параллельна какой-либо плоскости, то на эту плоскость угол проецируется в свой натуральный размер, т.е. 90° . Одна из сторон нашего прямого угла – фронталь, следовательно, на фронтальную плоскость проекций этот прямой угол спроецируется без искажения. Таким образом, фронтальная проекция линии наибольшего наклона плоскости ABC к П2 будет перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали данной плоскости.

Итак, для того чтобы построить линию наибольшего наклона плоскости ABC к П2, вначале проводят фронталь плоскости ABC (прямая CD), а затем любую прямую, принадлежащую данной плоскости и перпендикулярную к фронтальной проекции ее фронтали. В данном случае – это прямая BK (рис. 50). Ее фронтальная проекция B2K2 перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали плоскости ABC. Горизонтальная проекция этой прямой – B1K1.

Теперь осталось определить угол наклона линии BK к плоскости П2. Для этого воспользуемся правилом прямоугольного треугольника и определим искомый угол, а заодно и натуральную величину отрезка прямой BK – B0K2.

3.4.4. Принадлежность точки и прямой плоскости

Любая точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

Прямая принадлежит плоскости, если имеет с ней, как минимум, две общих точки.

Использование этих двух положений для решения конкретных задач рассмотрено на примерах.

Пример 3.3. Плоскость общего положения задана треугольником ABC. Точка E принадлежит плоскости ABC и дана своей горизонтальной проекцией E1. Требуется найти ее фронтальную проекцию E2 (рис. 51).

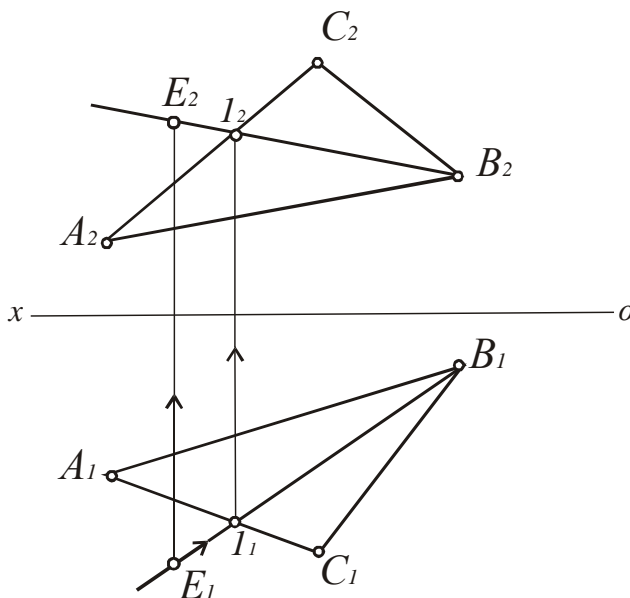


Рис. 51

Так как по условию задачи точка E принадлежит плоскости ABC , через нее можно провести прямую, которая также будет принадлежать плоскости ABC и иметь с ней, как минимум, две общих точки. При этом, если точка принадлежит прямой, то ее проекции лежат на соответствующих проекциях прямой. Следовательно, можно провести горизонтальную проекцию такой прямой через данную горизонтальную проекцию точки E_1 , но сделать это нужно так, чтобы получить возможность зафиксировать две точки, общие для данной плоскости и проводимой прямой. В данном случае такими общими для плоскости и прямой точками являются точки A и 1 . Так как горизонтальная проекция точки E лежит на продолжении горизонтальной проекции прямой A_1 , то очевидно, что фронтальная проекция E_2 будет находиться на продолжении фронтальной проекции указанной прямой.

Пример 3.4. Плоскость общего положения задана двумя параллельными прямыми AB и CE . Точка K принадлежит плоскости $ABCE$, задана своей фронтальной проекцией. Требуется найти

горизонтальную проекцию точки К (рис. 52).

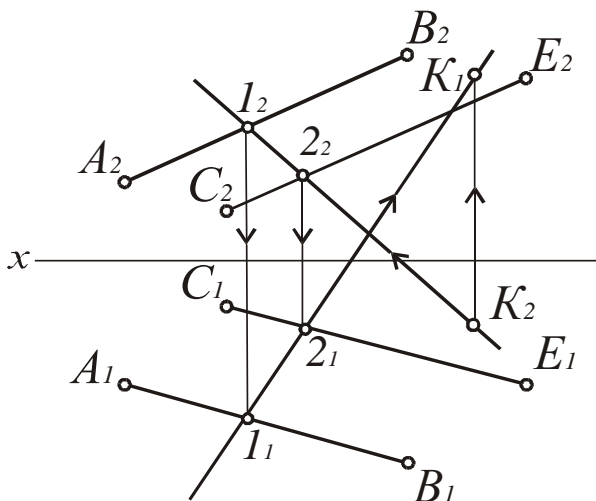


Рис. 52

Точка К принадлежит плоскости ABCE, поэтому через нее можно провести прямую, которая также будет принадлежать плоскости ABCE и иметь с ней как минимум две общих точки. Точка К дана своей фронтальной проекцией, следовательно, через нее можно провести только фронтальную проекцию такой прямой. Обозначим фронтальные проекции общих для прямой и плоскости точек - 1_2 и 2_2 . Точки 1 и 2 лежат на заданных прямых AB и CE соответственно. Для того чтобы найти горизонтальную проекцию точки К, необходимо построить горизонтальную проекцию прямой $1-2$, которой точка К принадлежит (по построению). Горизонтальная проекция точки K_1 находится на продолжении горизонтальной проекции прямой 1121 .

Вопросы для самоконтроля по теме «Проецирование плоскости»

1. Какие способы задания плоскостей Вы знаете?
2. Как обозначают следы плоскости?
3. Назовите возможные положения плоскости относительно плоскостей проекций.
4. Что такое проецирующие плоскости? Какие отличительные признаки на чертеже они имеют?
5. Что такое плоскости уровня? Какие отличительные признаки на чертеже они имеют?
6. Как построить прямую, принадлежащую плоскости?
7. Что называется фронталью и горизонталью плоскости?
8. Что называется линиями наибольшего наклона к плоскостям проекций? Что они показывают?
9. Назовите условие принадлежности прямой плоскости.
10. Назовите условие принадлежности точки плоскости.
11. Сформулируйте общий принцип построения недостающей проекции точки, принадлежащей плоскости.

Задачи для самостоятельной работы по теме «Проецирование плоскости»

Плоскости общего и частного положения

1. Построить недостающие проекции плоскостей (рис. 53, а, б, в).

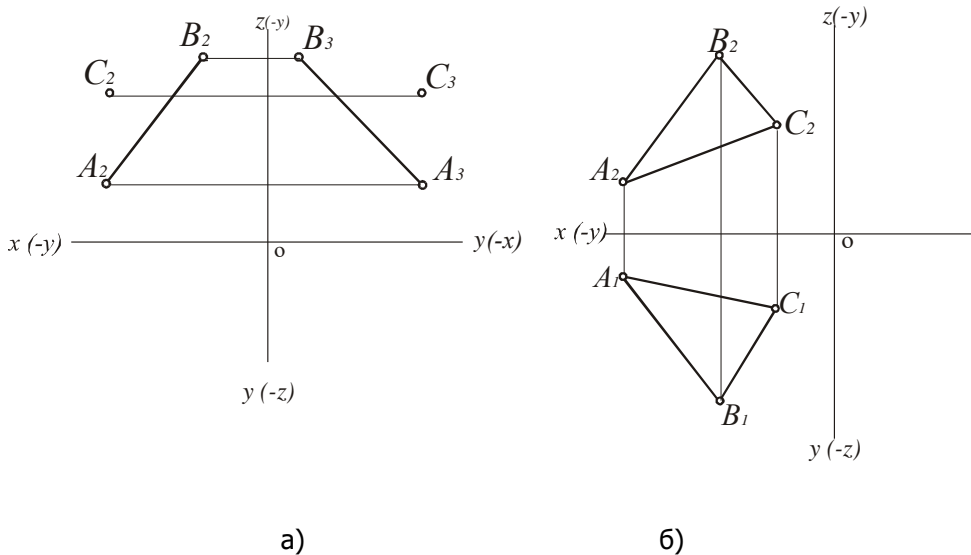


Рис. 53

2. Построить недостающие проекции плоскостей (рис. 54, а, б, в, г, д):

- а) $(AB \parallel CD) \perp \Pi_1$;
- б) $(CD \parallel EF) \perp \Pi_2$;
- в) $\alpha \perp \Pi_1$;
- г) $(KLP) \perp \Pi_1$;
- д) $\beta \perp \Pi_2$.

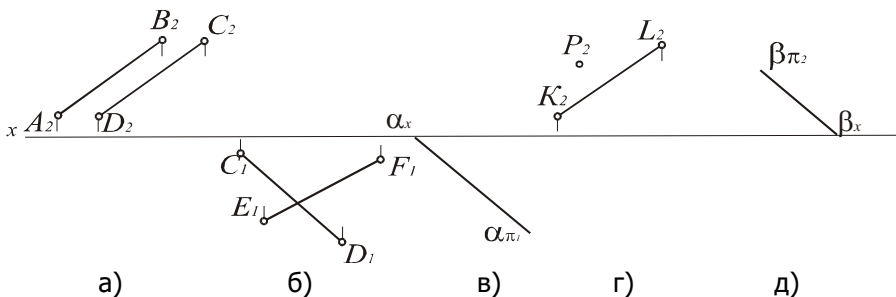


Рис. 54

Прямая общего положения в плоскости общего положения

3. В плоскостях ABC (рис. 55,а) и α (рис. 55,б) провести любую прямую общего положения, принадлежащую заданной плоскости.

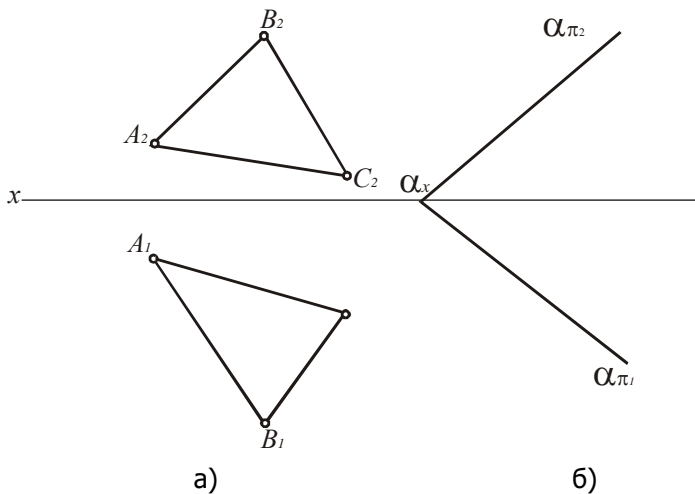


Рис. 55

4. Плоскость α задана следами (рис. 56). Задайте указанную плоскость:

- а) параллельными прямыми;
- б) пересекающимися прямыми.

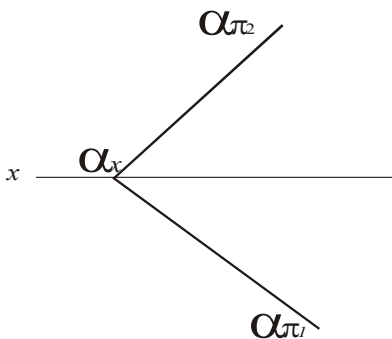


Рис. 56

Прямые частного положения в плоскости общего положения

5. Провести горизонталь плоскостей ABC (рис.57,а) и α (рис.57,б), отстоящую от плоскости Π_1 на 2см.

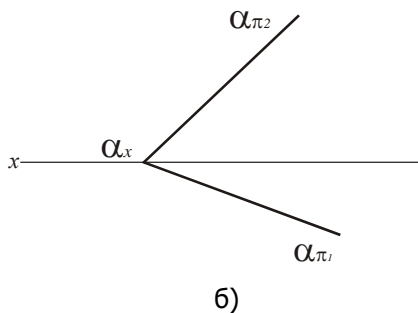
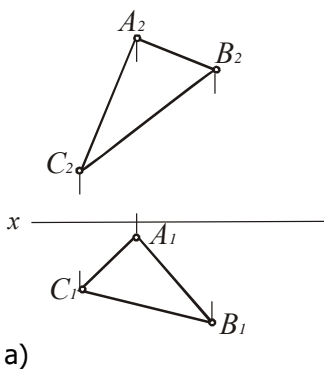


Рис. 57

6. Провести фронталь плоскостей ABC (рис.58,а) и β (рис.58,б), отстоящую от П2 на 5 см.

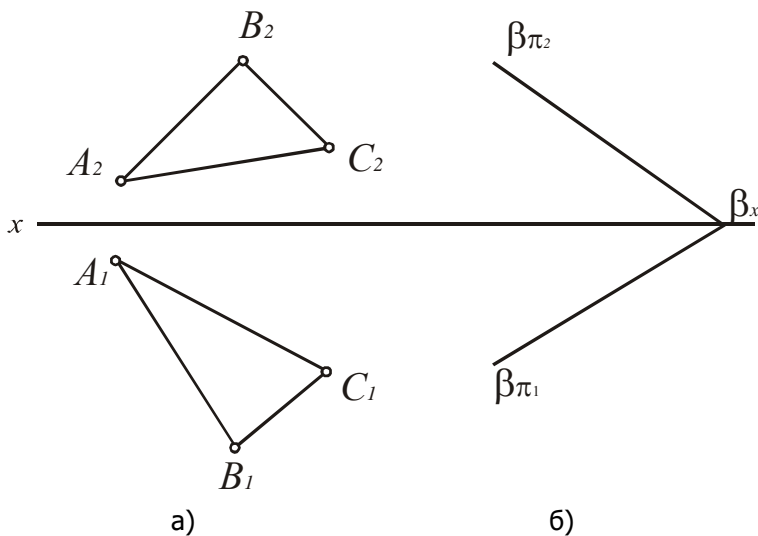


Рис. 58

7. Провести горизонталь плоскости γ , отстоящую от плоскости П1 на 2см, и фронталь, отстоящую от плоскости П2 на 4 см (рис.59).

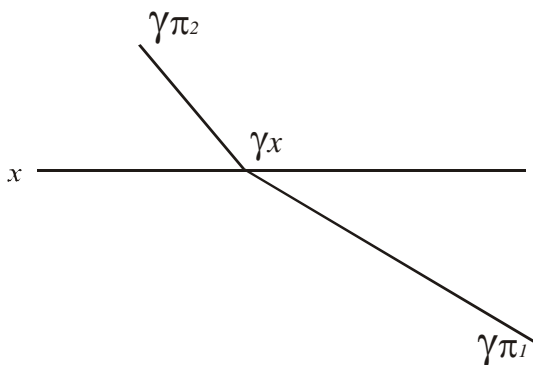


Рис. 59

8. Определить угол наклона плоскости α к плоскости П1 (рис.60).

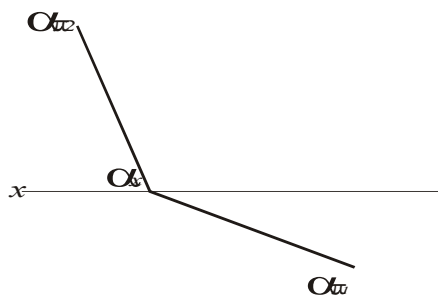


Рис. 60

9. Определить угол наклона плоскости ABC к плоскости П2 (рис. 61).

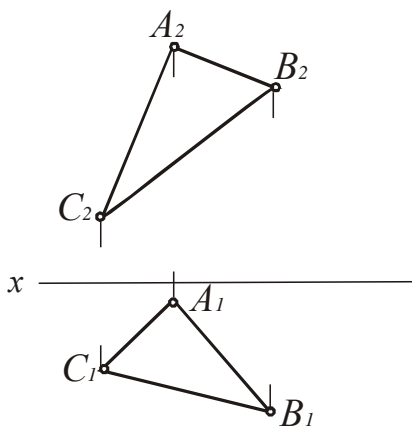


Рис. 61

Принадлежность точки и прямой плоскости

10. Найти недостающие проекции точек, принадлежащих заданным плоскостям (рис. 62).

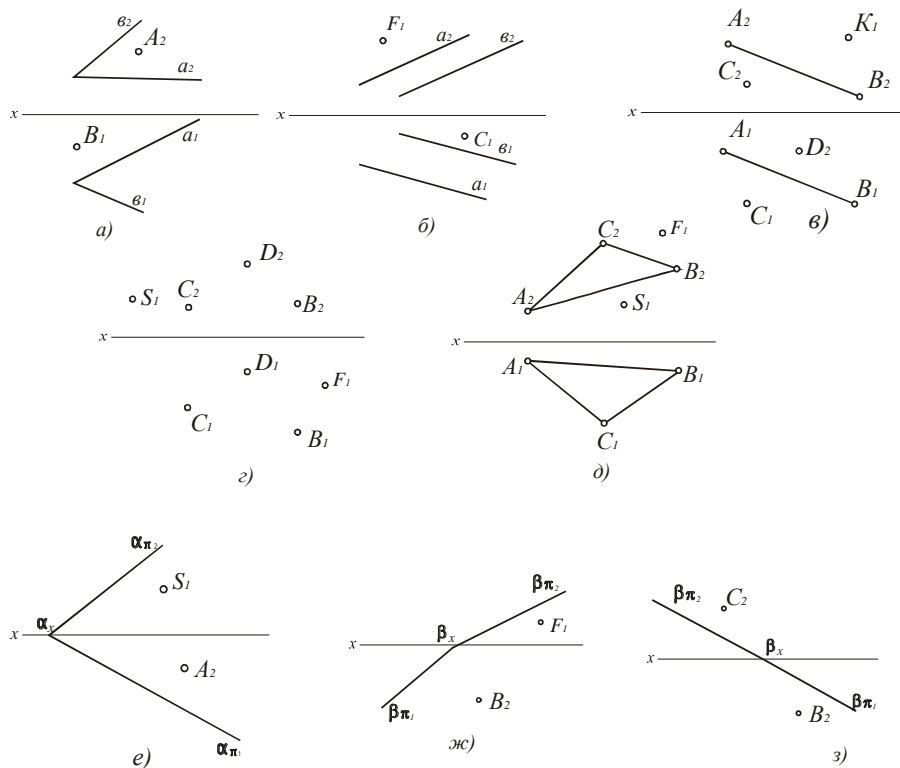


Рис. 62

Найти недостающие проекции точек принадлежащих заданным плоскостям частного положения (рис. 63).

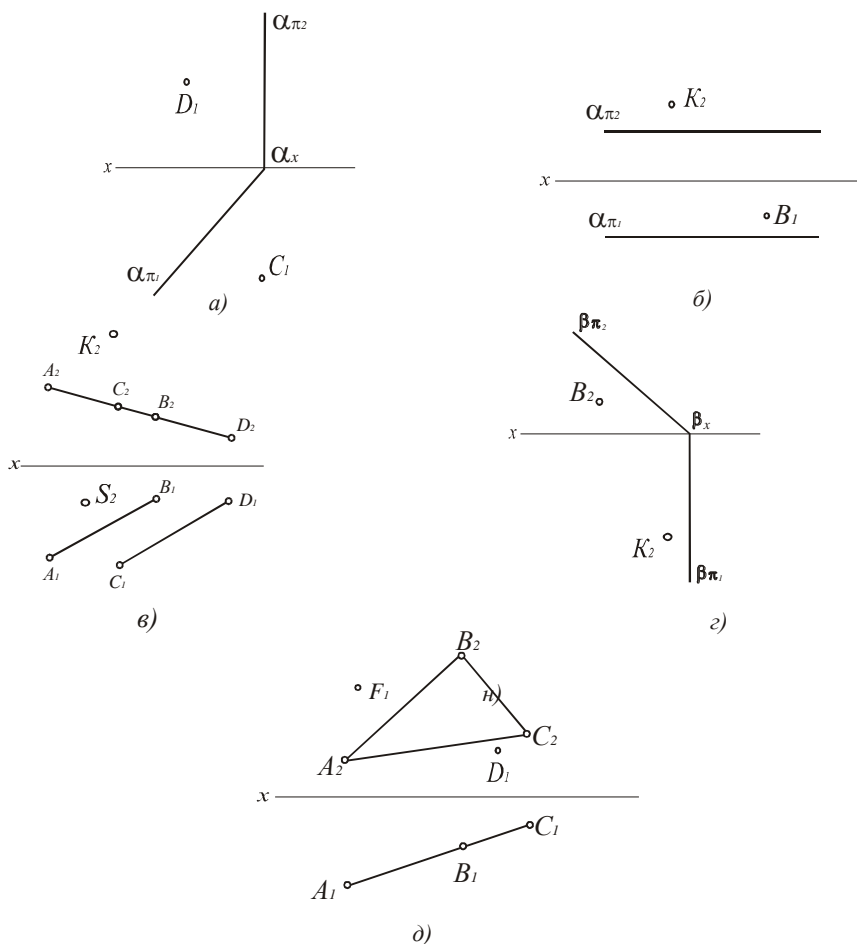
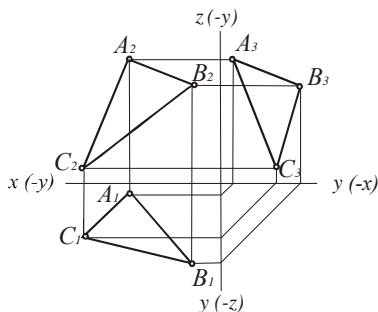


Рис. 63

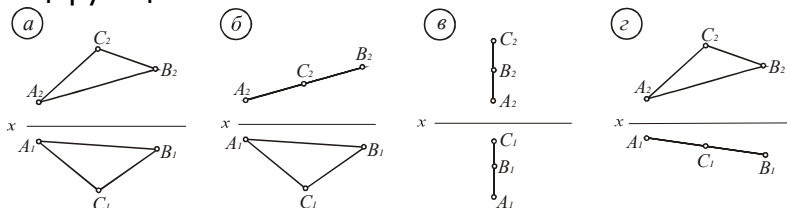
Тест по теме «Проецирование плоскости»

1. Как называется плоскость, заданная на чертеже?

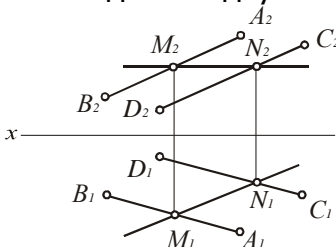


- ☐ а - горизонтальная;
- ☐ б - фронтально-проецирующая;
- ☐ в - общего положения;
- ☐ г - профильно-проецирующая;

2. На каком чертеже показана фронтально-проецирующая плоскость?

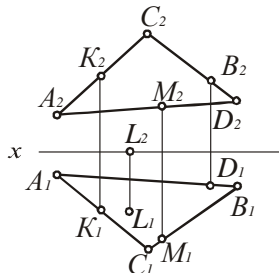


3. Как называется прямая MN принадлежащая плоскости заданной двумя параллельными прямыми AB и CD?



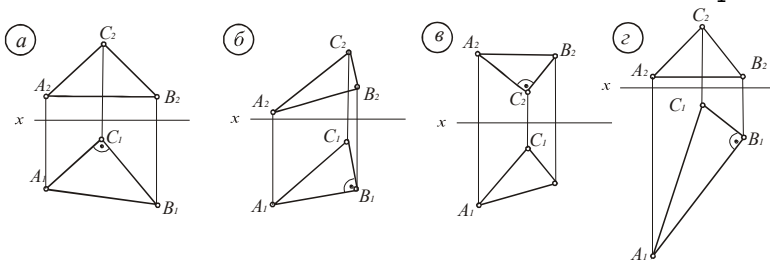
- ☐ а - горизонталь;
- ☐ б - фронталь
- ☐ в - профильная прямая;
- ☐ г - линия наибольшего наклона

4. Какая из точек лежит на плоскости ABC?



- ☐ а - точка D;
- ☐ б - точка K;
- ☐ в - точка M;
- ☐ г - точка L

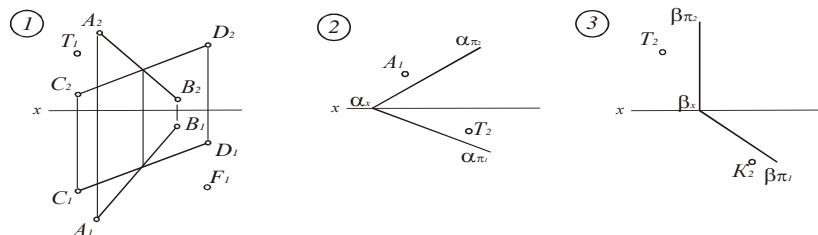
5. На каком чертеже одна из сторон треугольника является линией наибольшего наклона к плоскости Π_1 ?



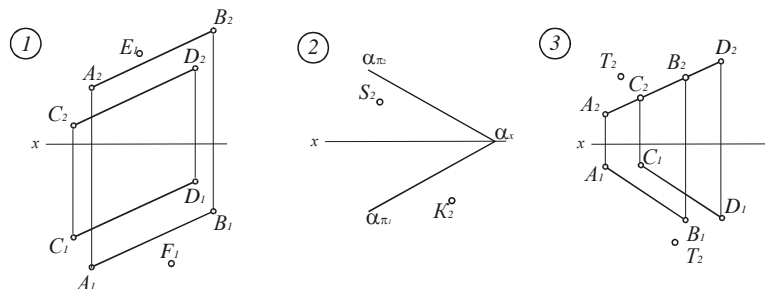
Контрольная работа по теме «Проецирование плоскости»

Задание Дана плоскость и одна из проекций принадлежащих ей точек, необходимо построить недостающие проекции точек.

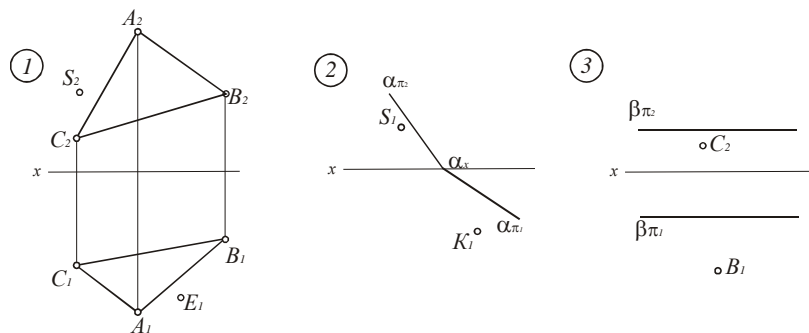
Вариант 1



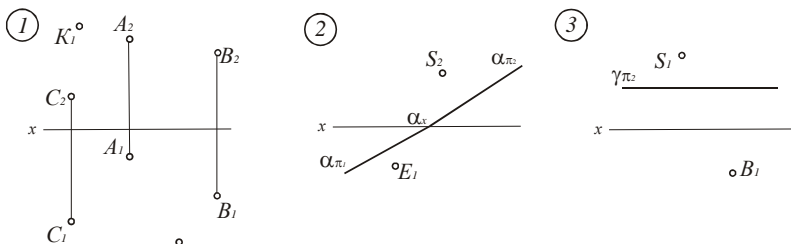
Вариант 2



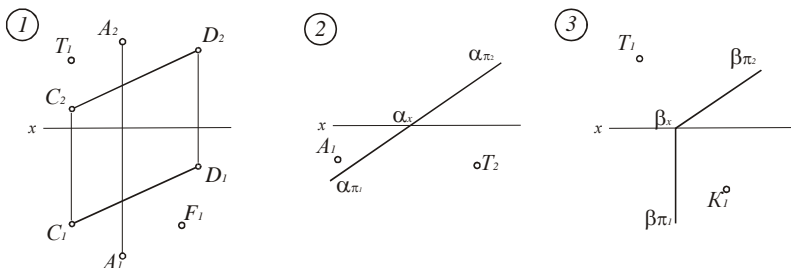
Вариант 3



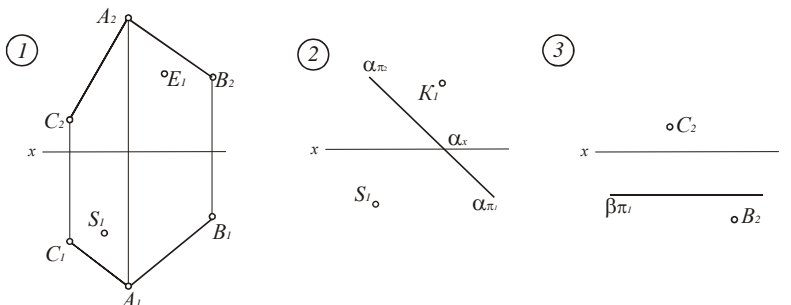
Вариант 4



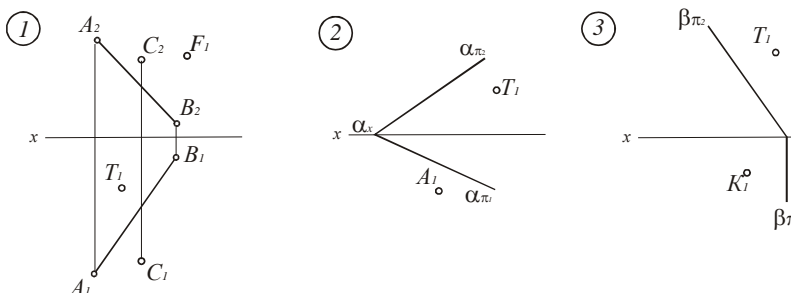
Вариант 5



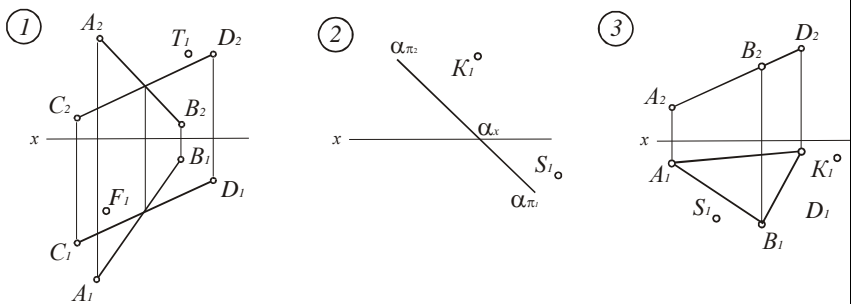
Вариант 6



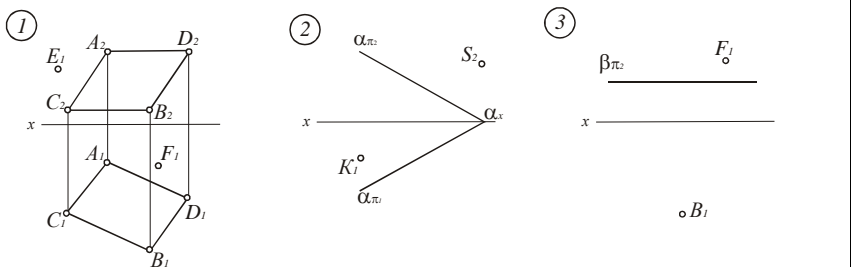
Вариант 7



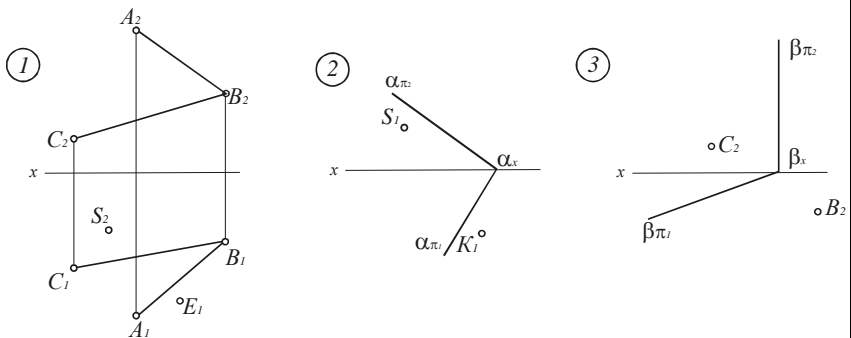
Вариант 8



Вариант 9



Вариант 10



3.5. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

3.5.1. Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, принадлежащей этой плоскости.

Следовательно, для того чтобы через какую-либо точку A (не принадлежащую заданной плоскости α) провести прямую, параллельную плоскости α , необходимо сначала провести любую прямую, лежащую в заданной плоскости, а затем через точку A провести прямую, параллельную той, что принадлежит заданной плоскости α (рис. 64,а,б).

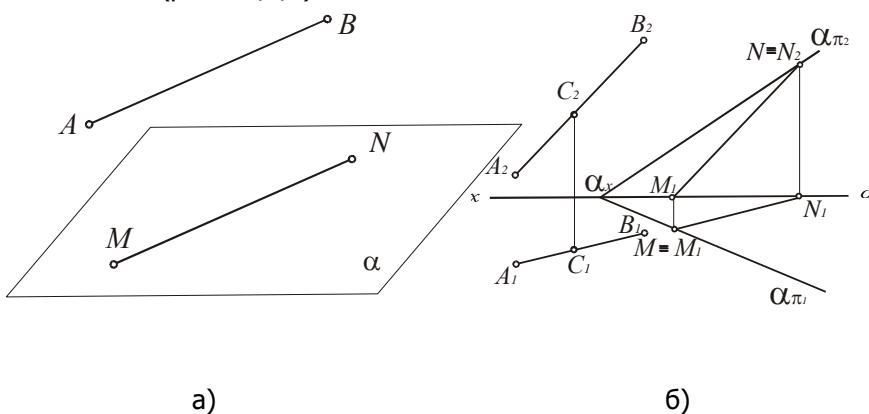


Рис. 64

3.5.2. Параллельность плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны между собой (рис. 65,а,б).

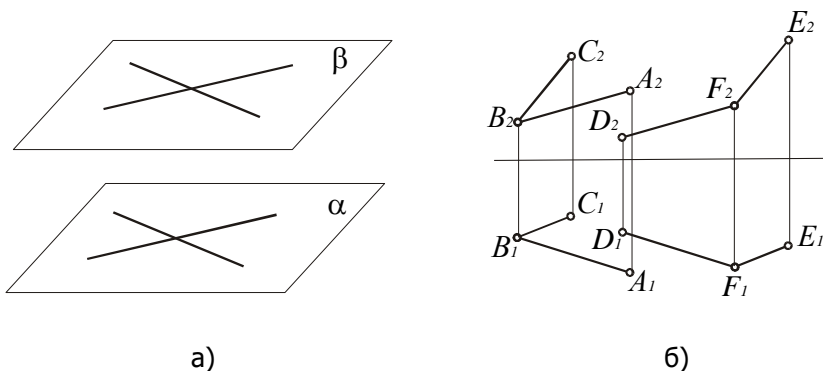


Рис. 65

Из этого правила следует, что если плоскости параллельны в пространстве, то их одноименные следы так же параллельны, т.к. следы плоскости можно рассматривать как пересекающиеся прямые. То есть, если $\alpha \parallel \beta$, то $\alpha_{\pi 1} \parallel \beta_{\pi 1}$, и $\alpha_{\pi 2} \parallel \beta_{\pi 2}$. На рис. 65 показаны примеры параллельных плоскостей.

Учитывая, что горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу плоскости, а фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу, можно утверждать, что у параллельных плоскостей горизонтالي и фронтالي соответственно параллельны между собой, если $\alpha \parallel \beta$, то $\Gamma\Gamma\alpha \parallel \Gamma\Gamma\beta$, и $\Phi\Phi\alpha \parallel \Phi\Phi\beta$ (рис. 66).

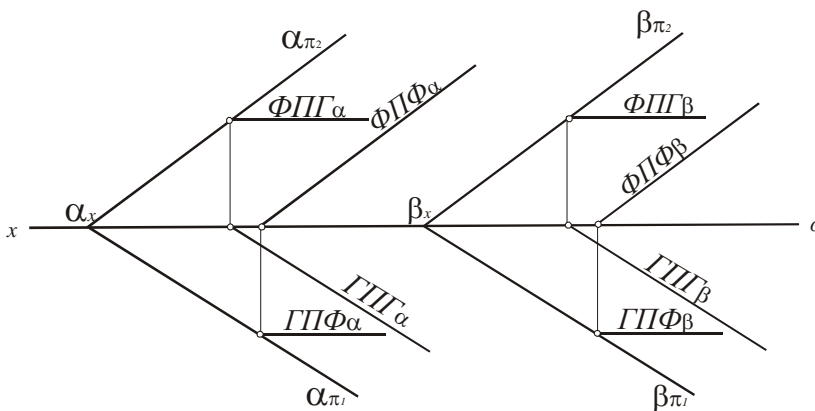


Рис. 66

Пример 3.5. Через точку E провести плоскость α следами, параллельную плоскости ABC (рис. 67).

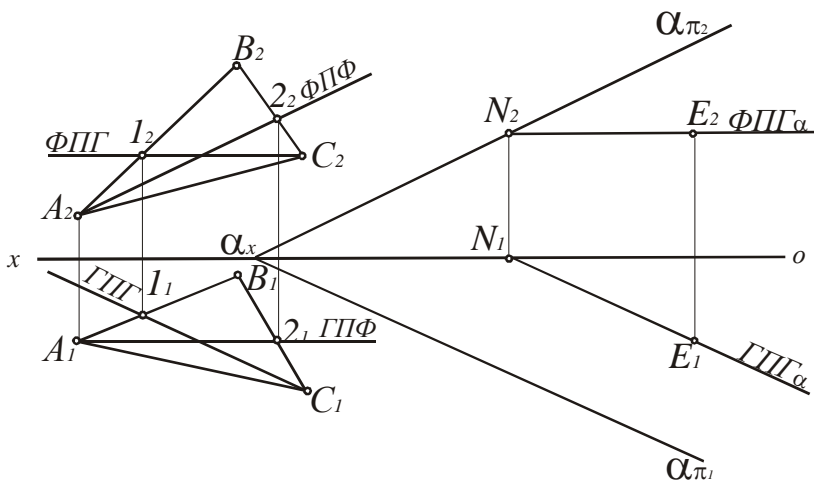


Рис. 67

Так как плоскости ABC и α должны быть параллельны между собой, то и их горизонтали и фронтолы также должны быть параллельны. Поэтому, сначала проводят горизонталь и фронталь заданной плоскости ABC . Затем через точку E проводят горизонталь будущей плоскости α . Получают фронтальный след горизонтали точку $N \equiv N_2$. Если прямая принадлежит плоскости, то ее следы лежат на одноименных следах плоскости. Следовательно, через точку $N \equiv N_2$ можно провести фронтальный след плоскости α_{π_2} , который будет параллелен фронтальной проекции фронтали плоскости ABC (у параллельных плоскостей фронтолы параллельны). При этом на оси OX получают точку схода следов α_x . Так как плоскости ABC и α должны быть параллельны между собой, то и их горизонталь также должны быть параллельны. Теперь осталось провести через найденную точку схода следов горизонтальный след плоскости α , который пройдет параллельно горизонтальной проекции горизонтали.

3.5.3. Пересекающиеся плоскости

Если плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой линии, для построения которой достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно обеим плоскостям. В случае, когда плоскости заданы следами, такими общими точками могут быть точки пересечения одноименных следов. Пример пересечения плоскостей общего положения показан на рис. 68.

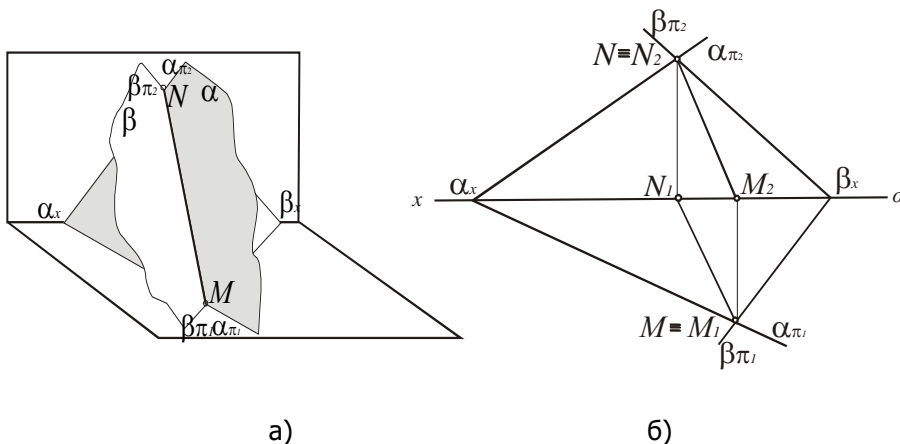


Рис. 68

Рассмотрим теперь случай пересечения плоскости общего положения α и горизонтальной плоскости уровня β (рис.69,а,б). Линия пересечения – это линия, принадлежащая одновременно обеим плоскостям, то есть и плоскости α , и плоскости β . Но раз она принадлежит горизонтальной плоскости β , значит она параллельна плоскости P_1 . А прямая, принадлежащая плоскости α и параллельная горизонтальной плоскости проекций, есть горизонталь плоскости α . Следовательно, линия пересечения в данном случае – это горизонталь плоскости α , имеющая фронтальный след в точке пересечения фронтальных следов плоскостей α и β .

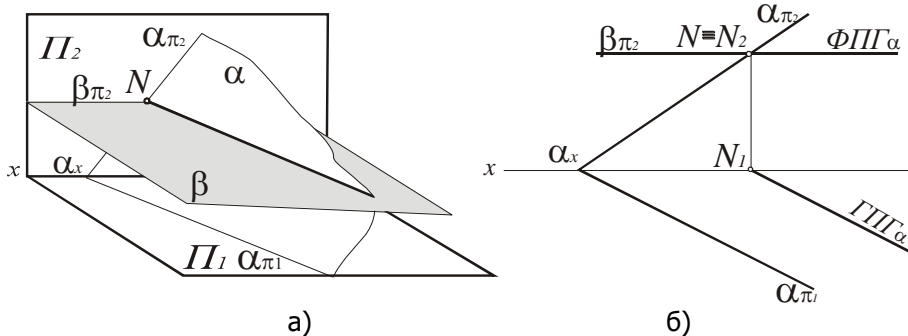


Рис 69

Пример построения линии пересечения плоскости общего положения, заданной треугольником ABC, и горизонтально-проецирующей плоскости β представлен на рис. 70,а,б.

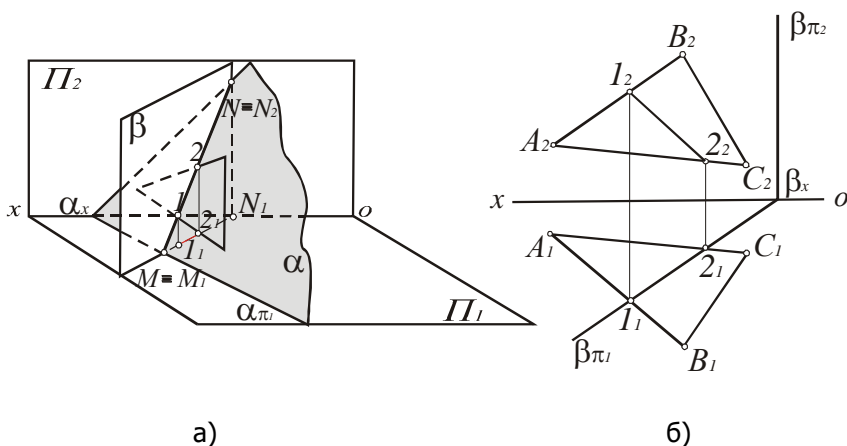


Рис. 70

Горизонтальную проекцию линии пересечения плоскостей ABC и β найти достаточно просто, т.к. она, будучи общей для обеих плоскостей, находится на горизонтальном следе плоскости β , который обладает собирательным свойством. Отмечают проекции двух базовых точек на линии пересечения плоскостей ACB и β (11 и 21). Затем находят их фронтальные проекции 12 и 22, которые соединяют прямой и получают фронтальную проекцию линии пересечения плоскости ABC общего положения и горизонтально-

проецирующей плоскости β .

Нередки случаи, когда требуется построить линию пересечения плоскостей, следы которых не пересекаются на поле чертежа. Рассмотрим порядок решения подобной задачи (рис. 71).

Даны две плоскости общего положения α и β , фронтальные следы которых не пересекаются на поле чертежа. Требуется построить линию пересечения плоскостей α и β .

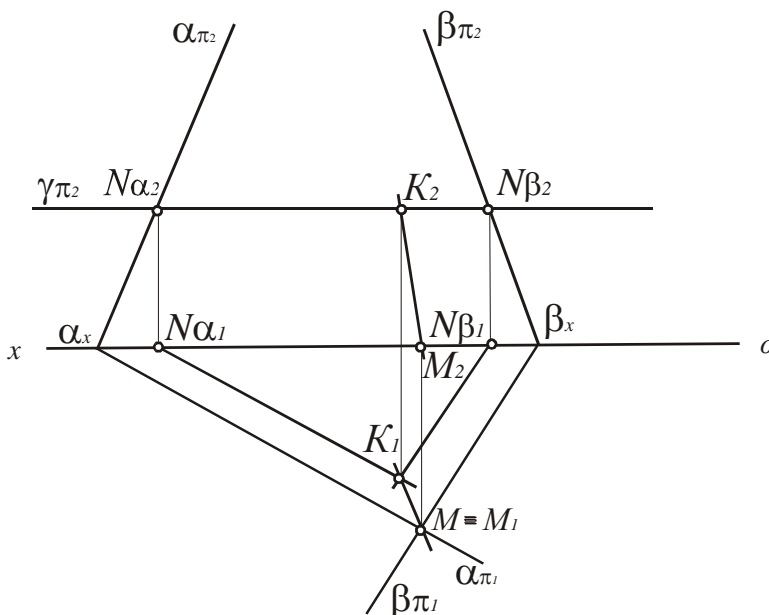


Рис. 71

Для построения линии пересечения двух плоскостей необходимо найти две точки, общие для обеих плоскостей. Одну из этих точек легко найти сразу - это точка M пересечения горизонтальных следов $\alpha_{\pi 1}$ и $\beta_{\pi 1}$. Для нахождения второй общей точки вводят вспомогательную горизонтальную плоскость уровня γ и строят линии пересечения вспомогательной плоскости с каждой из заданных. Линия пересечения плоскостей α и γ - это горизонталь плоскости α с фронтальным следом $N\alpha$. Линия пересечения плоскостей β и γ - это горизонталь плоскости β с фронтальным

следом $N\beta$. Обе эти линии пересечения пересекаются в точке K , т.е точка K принадлежит плоскостям α , β и γ . Плоскость γ - вспомогательная. Следовательно, точка K является второй общей точкой для заданных плоскостей α и β . Соединив одноименные проекции точек M и K , получают проекции искомой линии пересечения плоскостей α и β .

3.5.4. Пересечение прямой и плоскости

Если прямая не лежит в плоскости и не параллельна ей, то она пересекает плоскость и имеет с ней одну общую точку.

Пусть заданы плоскость общего положения α и прямая общего положения AB . Требуется определить точку K пересечения прямой AB с плоскостью α . Порядок решения задач такого типа следующий:

Заключают прямую AB во вспомогательную плоскость γ (как правило, вспомогательная плоскость – проецирующая).

Строят линию пересечения заданной плоскости α и вспомогательной γ .

Определяют искомую точку K на пересечении заданной прямой AB и построенной линии пересечения плоскостей α и γ .

Подробнее рассмотрим этот материал на примерах.

Пример 3.6. Плоскость общего положения α задана следами. Требуется найти точку K пересечения прямой AB с плоскостью α (рис.72,а,б).

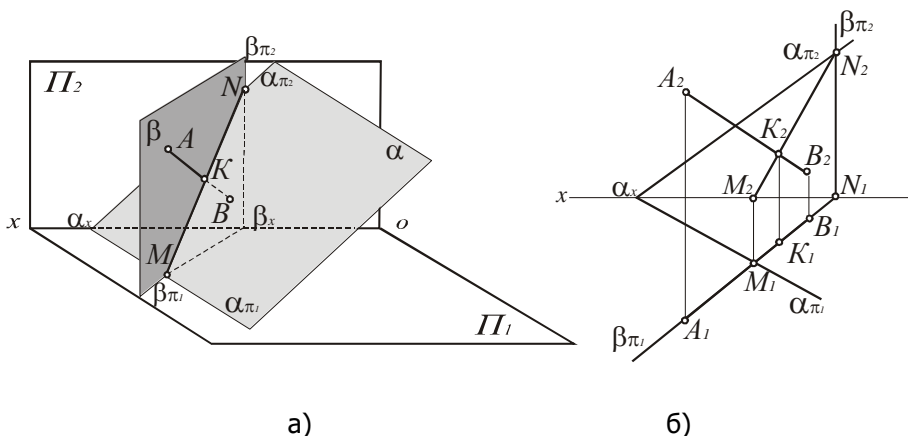


Рис. 72

Заключают прямую АВ во вспомогательную, горизонтально проецирующую плоскость β . Горизонтальный след такой плоскости обладает собирательным свойством. А так как плоскость β проходит через прямую АВ, то A_1B_1 лежит на ее горизонтальном следе β_{π_1} . Фронтальный след плоскости β – перпендикулярен оси ОХ.

Строят линию пересечения плоскостей α и β . Плоскости заданы следами, следовательно, общими точками, необходимыми для построения их линии пересечения, могут быть точки пересечения одноименных следов – точка N (точка пересечения фронтальных следов плоскостей α и β) и точка M (точка пересечения горизонтальных следов указанных плоскостей). Проецируют эти точки и соединяют их одноименные проекции. Получают горизонтальную M_1N_1 и фронтальную M_2N_2 проекции линии пересечения плоскостей α и β .

Фронтальную проекцию точки пересечения прямой АВ с плоскостью α находят на пересечении фронтальной проекции построенной линии пересечения плоскостей и фронтальной проекции заданной прямой A_2B_2 – это K_2 . Горизонтальная проекция точки К находится на горизонтальной проекции прямой АВ.

Пример 3.7. Плоскость общего положения задана треугольником ABC . Требуется найти точку пересечения плоскости ABC и прямой общего положения EP (рис. 73).

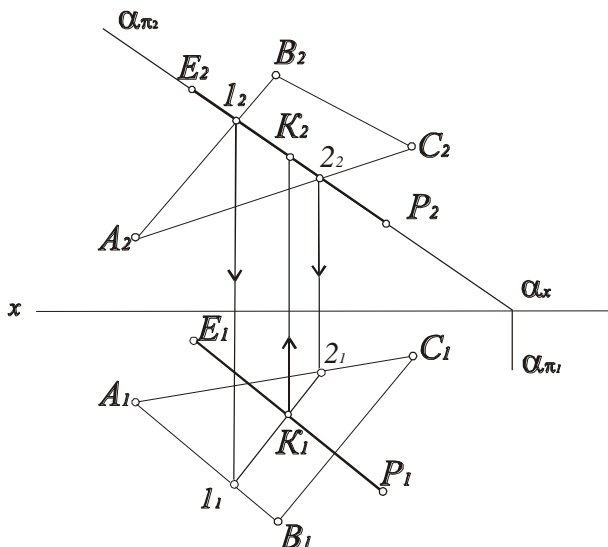


Рис. 73

Закljučают прямую EP во фронтально-проецирующую плоскость α . Фронтальный след плоскости α обладает собира- тельным свойством, а так как эта плоскость должна пройти через прямую EP , фронтальная проекция прямой E_2P_2 будет находиться на фронтальном следе $\alpha \cap \pi_2$. Горизонтальный след плоскости α – перпендикулярен оси OX .

Строят линию пересечения заданной плоскости ABC и вспомогательной α . Линия пересечения плоскостей – это прямая, принадлежащая одновременно обеим плоскостям. Плоскость α – фронтально-проецирующая, следовательно, фронтальная проек- ция линии пересечения плоскостей совпадает с фронтальным следом плоскости α . Отмечают фронтальные проекции точек 1_2 и 2_2 , принадлежащих линии пересечения. Находят их горизонталь- ные проекции 1_1 и 2_1 , соединив их получают горизонтальную

проекцию линии пересечения плоскостей ABC и α .

Все точки прямой 1–2 принадлежат плоскости ABC и плоскости α , а точка пересечения горизонтальных проекций этой прямой 1121 и заданной прямой $E1P1$ принадлежит еще и прямой EP . Следовательно, $K1$ – это горизонтальная проекция точки пересечения прямой EP и плоскости ABC . Теперь определяют фронтальную проекцию найденной точки пересечения $K2$, она находится на фронтальной проекции прямой $E2P2$.

3.5.5. Перпендикулярность прямой и плоскости

Частным случаем прямой, пересекающейся с плоскостью, является перпендикуляр к плоскости.

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

В качестве таких прямых могут быть использованы любые две, принадлежащие плоскости прямые, но при решении задач удобнее пользоваться прямыми частного положения, а именно, горизонталями и фронталями. Действительно, если какая-либо прямая перпендикулярна к горизонтали, то горизонтальная проекция такой прямой будет перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали (правило проецирования прямого угла: если одна из сторон прямого угла параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость прямой угол проецируется в свой натуральный размер), а следовательно, и к горизонтальному следу плоскости. Если же произвольная прямая перпендикулярна к фронту какой-либо плоскости, то фронтальная проекция этой прямой будет перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали (правило проецирования прямого угла) и, как следствие, к фронтальному следу плоскости (рис.74,а,б).

Таким образом, можно утверждать, что если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали или гори-

горизонтальному следу плоскости, а фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали или фронтальному следу плоскости.

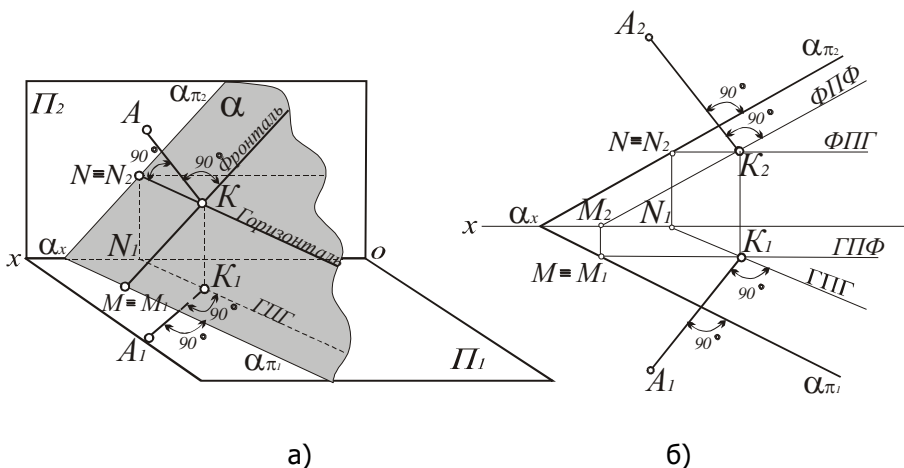


Рис. 74

Рассмотрим примеры, связанные с построением перпендикуляров к плоскости.

Пример 3.8. Плоскость общего положения α задана следами. Точка A не принадлежит плоскости α . Требуется определить расстояние от точки A до плоскости α (рис. 75).

Для того, чтобы определить расстояние от точки до плоскости необходимо из точки A опустить перпендикуляр на плоскость α , найти точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью α и затем определить натуральную величину найденного расстояния от точки до плоскости.

Плоскость α задана следами. Значит, для того, чтобы опустить перпендикуляр из точки A на плоскость α , следует из горизонтальной проекции точки A_1 провести прямую перпендикулярно горизонтальному следу плоскости α_{π_1} (это – горизонтальная проекция перпендикуляра, опущенного из точка A на плоскость α), а из фронтальной проекции точки A_2 провести прямую перпендикулярно фронтальному следу плоскости α_{π_2} (это – фронтальная проекция перпендикуляра, опущенного из точка A на плоскость α).

В результате проведенных операций устанавливается направление, по которому можно определить кратчайшее расстояние от точки до плоскости. Однако не известно, где опущенный из точки А перпендикуляр пересечется с плоскостью α , т.е. необходимо решить задачу о пересечении прямой с плоскостью. Для определения точки пересечения нашего перпендикуляра с заданной плоскостью α его заключают во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость β и строят линию пересечения плоскостей α и β . Затем на пересечении горизонтальных проекций построенной линии пересечения плоскостей и перпендикуляра находят горизонтальную проекцию K_1 точки пересечения перпендикуляра, опущенного из точки А, с плоскостью α . Фронтальная

проекция K_2 точки пересечения перпендикуляра с плоскостью α находится на фронтальной проекции перпендикуляра. Таким образом, получают проекции отрезка, равного расстоянию от точки A до заданной плоскости α .

Истинную величину расстояния между точкой A и плоскостью α определяют, пользуясь правилом прямоугольного треугольника.

Пример 3.9. Плоскость общего положения задана треугольником ABC . Точка S не принадлежит плоскости ABC . Требуется определить расстояние от точки S до плоскости ABC (рис. 76).

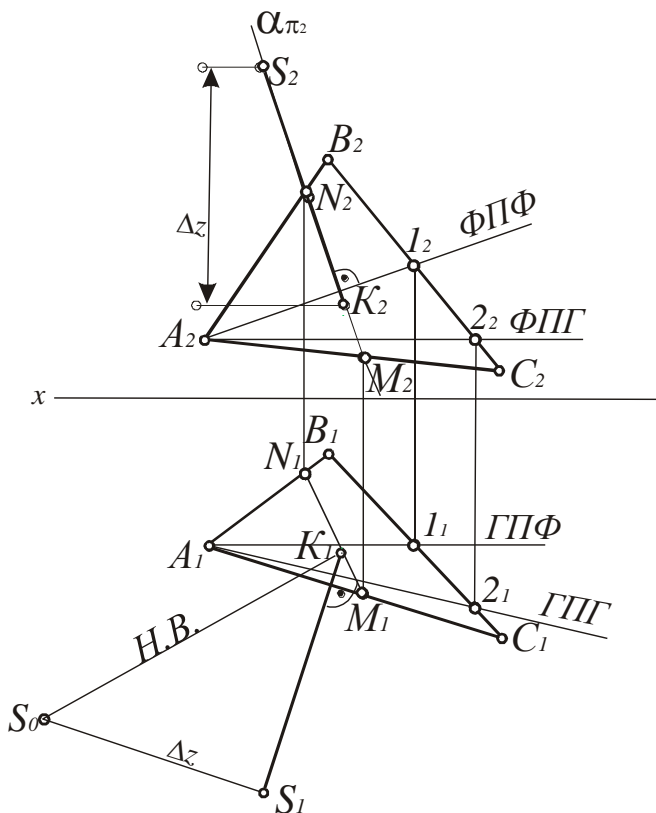


Рис. 76

Плоскость задана не следами, следовательно, для того, чтобы из точки S опустить перпендикуляр на плоскость, вначале необходимо провести в плоскости ABC горизонталь и фронталь. Затем из горизонтальной проекции точки S_1 проводят прямую перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали, а из фронтальной проекции точки S_2 - прямую перпендикулярно фронтальной проекции фронтали. В результате получают горизонтальную и фронтальную проекции прямой, проходящей через точку S и перпендикулярной к плоскости ABC .

Для нахождения точки K – точки пересечения этой прямой с заданной плоскостью ABC заключают указанную прямую во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость α , строят линию пересечения плоскостей ABC и α ; на пересечении горизонтальных проекций построенной линии пересечения плоскостей и перпендикуляра, опущенного из точки S , находят горизонтальную проекцию точки K . Фронтальная проекция точки K лежит на фронтальной проекции перпендикуляра.

Отрезок SK равен расстоянию от точки S до плоскости ABC . натуральную величину этого расстояния определим по правилу прямоугольного треугольника.

Пример 3.10. Фронтально-проецирующая плоскость α задана следами. Точка A не принадлежит плоскости α . Требуется найти расстояние от точки A до заданной плоскости (рис. 77).

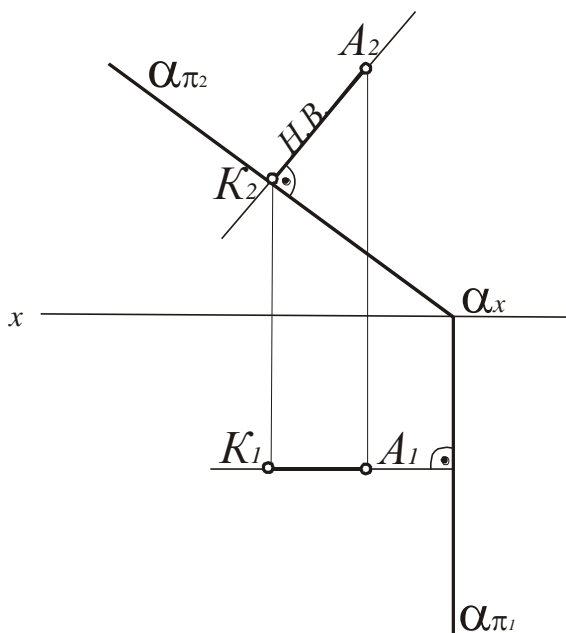


Рис. 77

Расстояние от точки A до плоскости α равно длине перпендикуляра, опущенного из точки A на указанную плоскость ($A_1K_1 \perp \alpha_{\pi_1}$, $A_2K_2 \perp \alpha_{\pi_2}$). Точка K – это точка пересечения перпендикуляра с плоскостью α , т.к. ее фронтальная проекция K_2 находится на пересечении фронтальной проекции перпендикуляра и фронтального следа заданной плоскости, последний же обладает собирательным свойством ($\alpha \perp \pi_2$). Истинная величина расстояния от точки A до плоскости α равна длине фронтальной проекции отрезка AK , т.к. он расположен параллельно фронтальной плоскости проекций.

3.5.6. Перпендикулярность плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости.

Рассмотрим построение взаимно перпендикулярных плоскостей на следующих примерах.

Пример 3.11. Плоскость общего положения α задана следами. Точка A не принадлежит плоскости α . Требуется через точку A провести плоскость β , перпендикулярную заданной плоскости α (рис. 78).

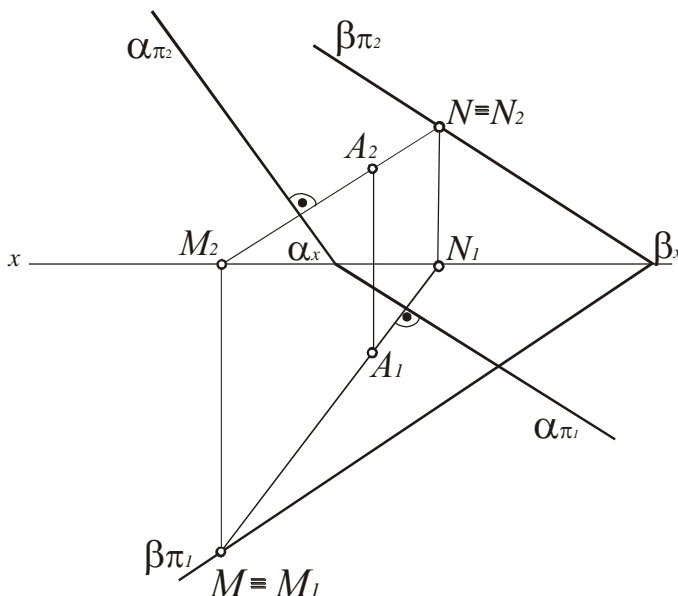


Рис. 78

Для того чтобы провести через точку A плоскость, перпендикулярную заданной, вначале необходимо через эту точку провести прямую, которая была бы перпендикулярна заданной плоскости α . С этой целью из фронтальной проекции точки A_2 проводят прямую перпендикулярно к фронтальному следу заданной плоскости $\alpha_{\pi 2}$, а из горизонтальной проекции точки A_1 прямую перпендикулярно к $\alpha_{\pi 1}$, т.е. получают две проекции прямой, перпендикулярной к заданной плоскости α и проходящей через точку A .

Затем находят следы этой прямой – горизонтальный M и фронтальный N .

На следующем этапе через построенную прямую MN проводят плоскость β , учитывая тот факт, что если прямая принадлежит плоскости, то ее следы лежат на одноименных следах плоскости. Точку схода следов β_x выбирают произвольно, т.к. плоскостей проходящих через прямую может быть множество. Таким образом, горизонтальный след плоскости $\beta_{П1}$ пройдет через точку схода следов β_x и горизонтальный след прямой M , а фронтальный след плоскости $\beta_{П2}$ - через β_x и фронтальный след N построенной нами прямой.

Пример 3.12. Через точку A треугольника ABC (плоскость общего положения) провести следами плоскость α перпендикулярно к стороне BC (рис. 79).

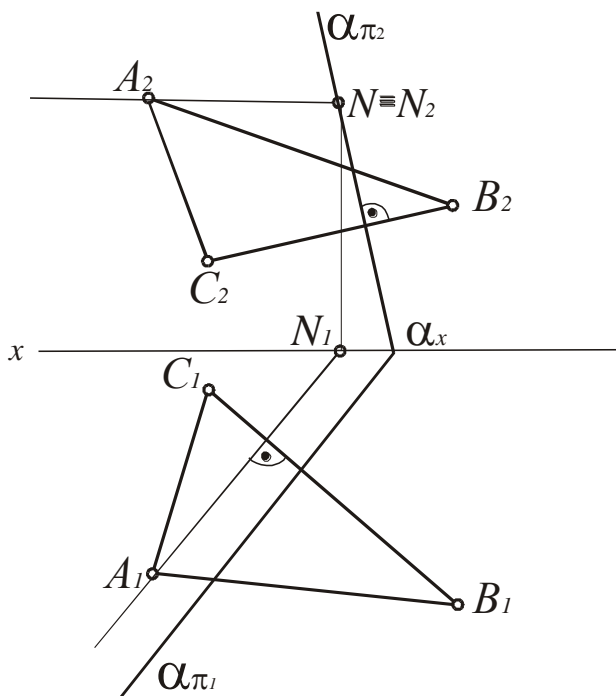


Рис. 79

Через точку A проводят горизонталь будущей плоскости α . Так как прямая BC должна быть перпендикулярна плоскости α , горизонтальная проекция горизонтали плоскости α – перпендикулярна B_1C_1 . Определяют фронтальный след N построенной горизонтали.

Фронтальный след плоскости α Π_2 пройдет через найденную точку N перпендикулярно к B_2C_2 (если прямая перпендикулярна какой-либо плоскости, ее проекции перпендикулярны к одноименным следам этой плоскости). На пересечении α Π_2 с осью проекций OX получают точку схода следов αx , через которую проводят горизонтальный след искомой плоскости α Π_1 параллельно горизонтальной проекции горизонтали A_1N_1 .

Вопросы для самоконтроля по теме «Взаимное положение прямых и плоскостей»

1. Назовите возможные относительные положения прямой и плоскости и их отличительные признаки на чертеже.
2. На чем основано построение прямой линии, которая должна быть параллельна некоторой плоскости?
3. Как построить точку пересечения прямой и плоскости?
4. Как определить «видимость» при пересечении прямой с плоскостью?
5. Назовите возможные относительные положения двух плоскостей.
6. Каков признак параллельности двух плоскостей?
7. Как располагаются одноименные следы двух параллельных между собой плоскостей?
8. Как построить линию пересечения плоскостей?
9. Каково условие перпендикулярности прямой и плоскости?
10. Как определить расстояние от точки до плоскости?
11. Как построить плоскость перпендикулярную к данной прямой?
12. Как построить взаимно перпендикулярные плоскости?

Задачи для самостоятельной работы по теме «Взаимное положение прямых и плоскостей»

1. Через точку S провести плоскость, параллельную плоскости α (рис. 80).

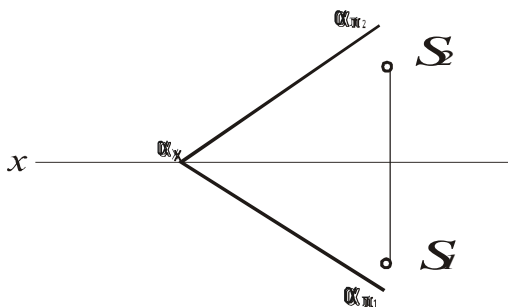


Рис. 80

2. Через точку D провести плоскость, параллельную плоскости ABC (рис. 81).

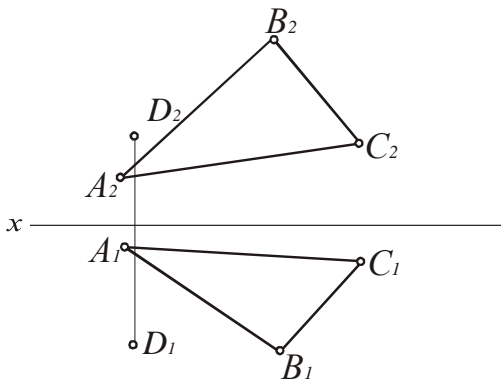


Рис. 81

3. Через точку A провести профильную прямую, параллельную данной плоскости (рис. 82).

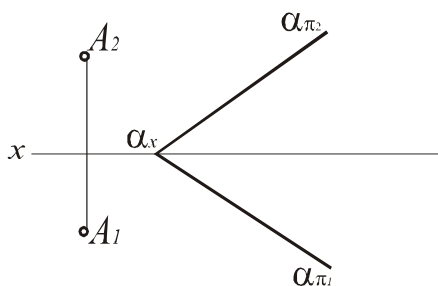


Рис. 82

4. Построить линию пересечения плоскостей (рис. 83).

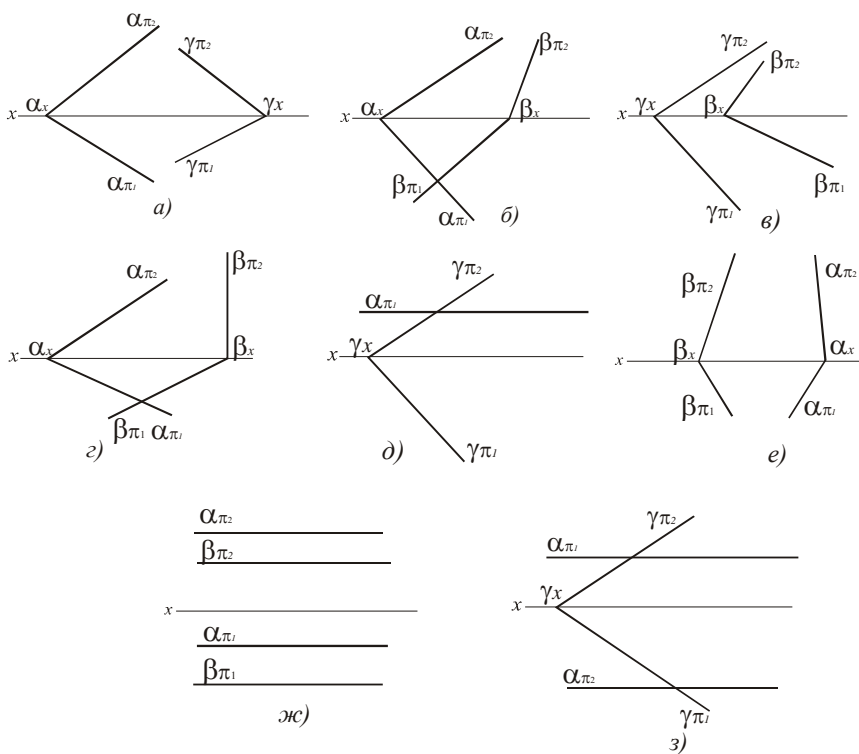


Рис. 83

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости (рис. 84).

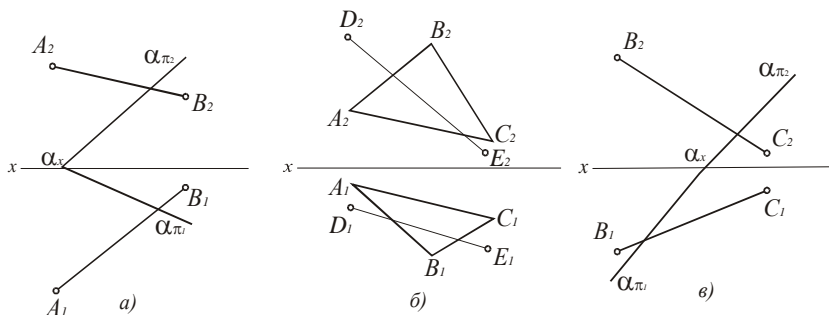


Рис. 84

6. Из точки S восстановить перпендикуляр на плоскости ABC и α (рис. 85, а, б).

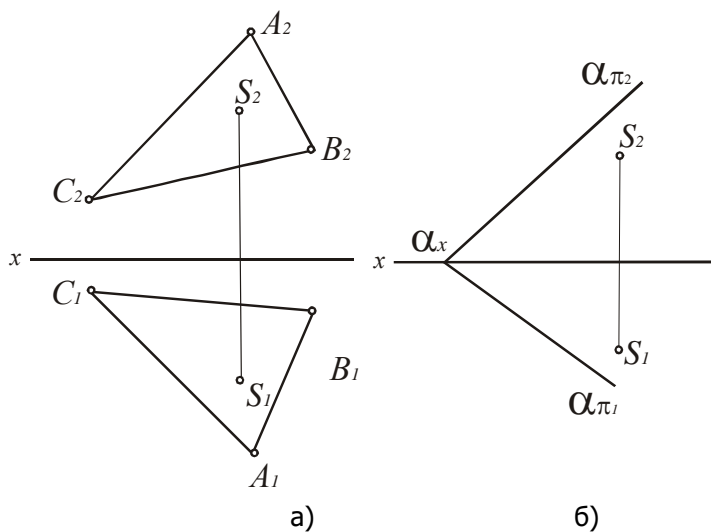


Рис. 85

Определить расстояние от точки Р до плоскостей α и ABC
(рис. 86,а,б).

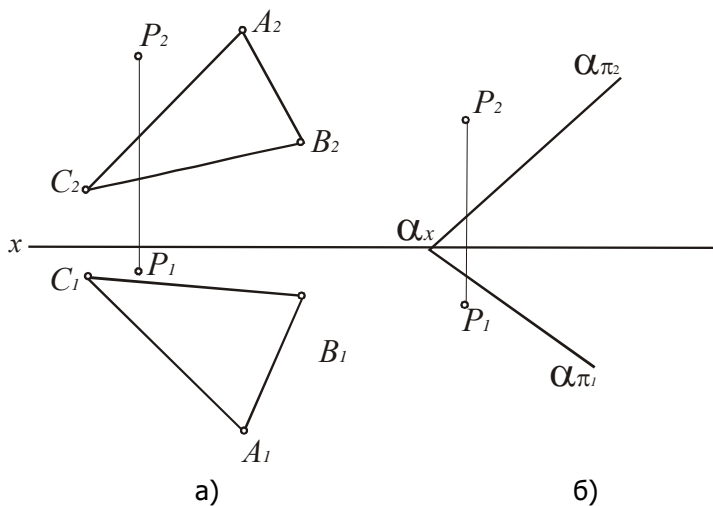


Рис. 86

8. Через точку S принадлежащую заданной плоскости провести плоскость перпендикулярную ей (рис. 87,а,б).

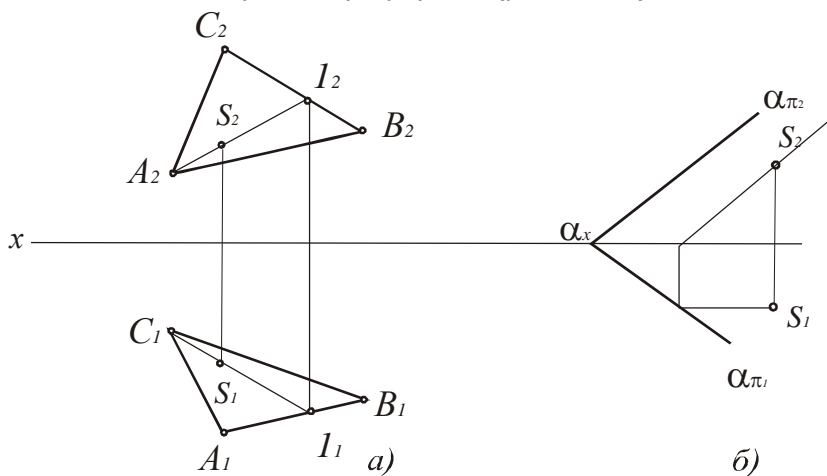
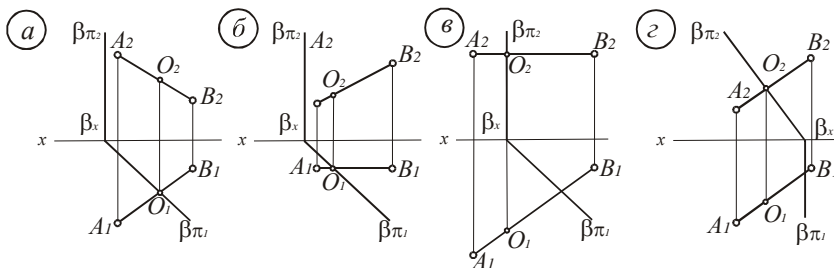


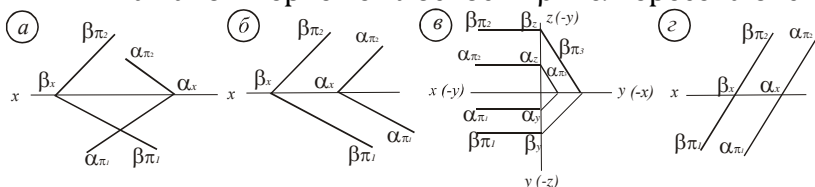
Рис. 87

Тест по теме «Взаимное положение прямых и плоскостей»

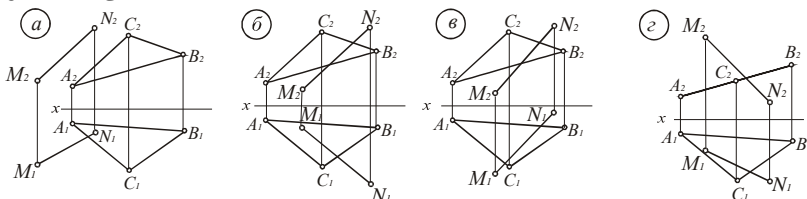
1. На каком чертеже неверно найдена точка O пересечения прямой AB с плоскостью β ?



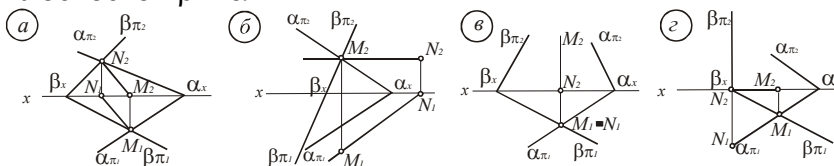
2. На каком чертеже плоскости β и α пересекаются?



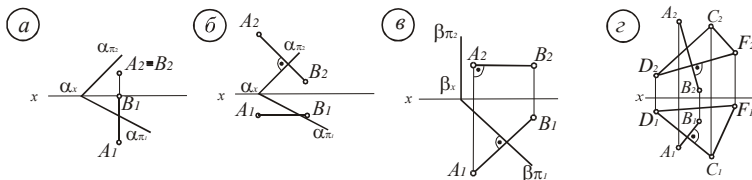
3. В каком случае прямая MN параллельна плоскости ABC ?



4. На каком чертеже правильно найдена линия MN пересечения плоскостей β и α ?



5. На каком чертеже изображена прямая $AB \perp$ плоскости α ?



ТЕМА 4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

В начертательной геометрии при решении многих метрических и позиционных задач возникает необходимость в использовании способов преобразования проекций, таких как: способ вращения и способ перемены плоскостей проекций. В ряде случаев могут применяться способы совмещения или плоскопараллельного перемещения, являющиеся частными случаями основных способов преобразования.

4.1. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ

Положение объекта относительно плоскостей проекций не всегда бывает удобным с точки зрения решения той или иной задачи. В этом случае целесообразно повернуть весь объект относительно какой-либо оси до желательного для нас положения относительно общепринятых плоскостей проекций. Таким образом, способ вращения заключается в том, что заданный объект вращают в пространстве вокруг некоторой оси до требуемого положения относительно плоскостей проекций.

При этом следует иметь в виду следующие основные положения, на которых базируется способ вращения:

- все точки вращаемого геометрического тела описывают в пространстве дуги окружностей, плоскости которых перпендикулярны оси вращения;
- центры этих дуг находятся на оси вращения, а радиусы

представляют собой кратчайшие расстояния от вращающихся точек до оси;

- точки вращаемого геометрического элемента, лежащие на оси вращения, при вращении не изменяют своего положения в пространстве;
- ось вращения должна быть перпендикулярна одной из плоскостей проекций.

4.1.1. Вращение точки

На рис. 88,а,б показано вращение точки A вокруг оси вращения I , перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций.

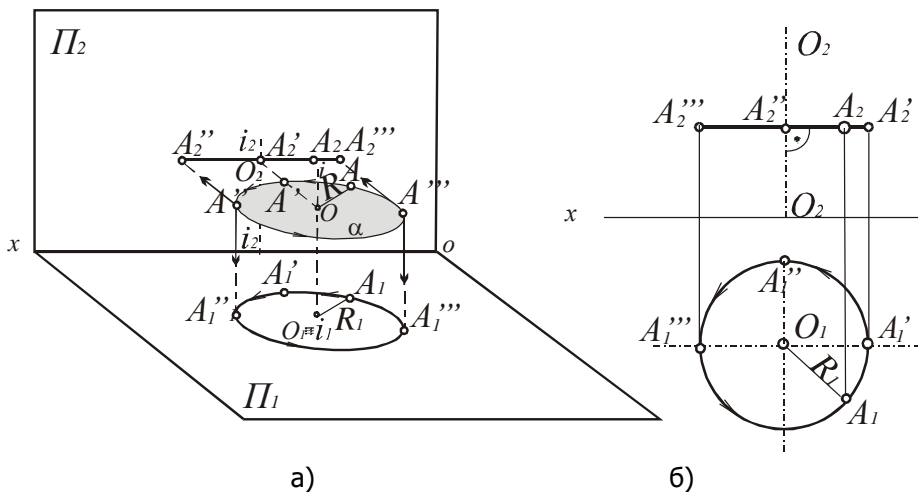


Рис. 88

Так как ось вращения перпендикулярна плоскости P_1 , горизонтальная проекция оси – точка, а фронтальная – прямая, перпендикулярная оси X . Если повернуть точку A вокруг оси вращения на некоторый угол α , то при этом точка A в пространстве опишет дугу окружности с центром на оси вращения, а плоскость этой окружности будет перпендикулярна оси вращения. На эпюре это будет выглядеть следующим образом: горизонтальная проек-

ция точки А переместится по дуге с центром на оси вращения, а фронтальная – по прямой, перпендикулярной фронтальной проекции оси вращения.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости Π_1 , горизонтальная проекция точки перемещается по дуге окружности с центром на оси вращения, а фронтальная – по прямой, перпендикулярной оси вращения, т.е. параллельно оси X.

Аналогичный вывод можно получить и для случая вращения точки вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций. А именно, при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости Π_2 , фронтальная проекция точки перемещается по дуге окружности с центром на оси вращения, а горизонтальная – по прямой, перпендикулярной оси вращения, т.е. параллельно оси X (рис. 89, а, б).

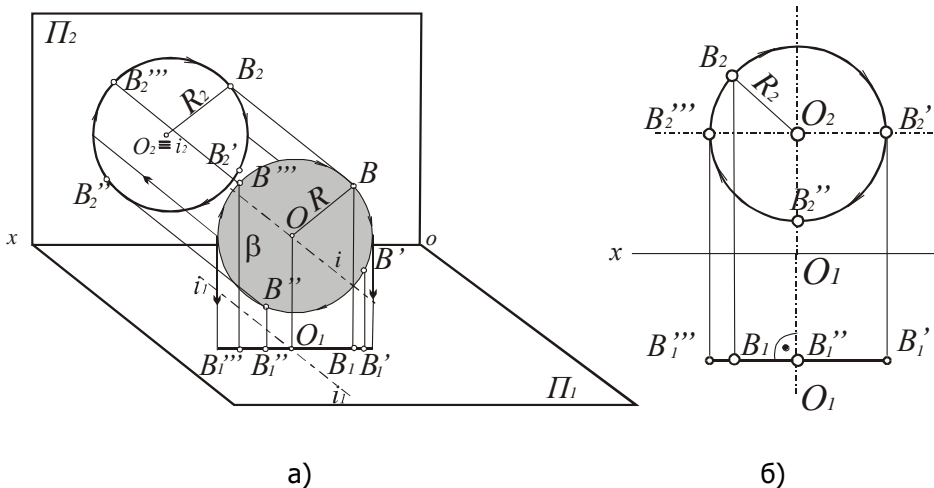


Рис. 89

4.1.2. Вращение прямой

Чтобы повернуть отрезок прямой на некоторый угол α вокруг заданной оси вращения, достаточно повернуть на этот угол две его точки (рис.90).

Если ось вращения проходит через конец отрезка, то достаточно повернуть на требуемый угол второй конец отрезка.

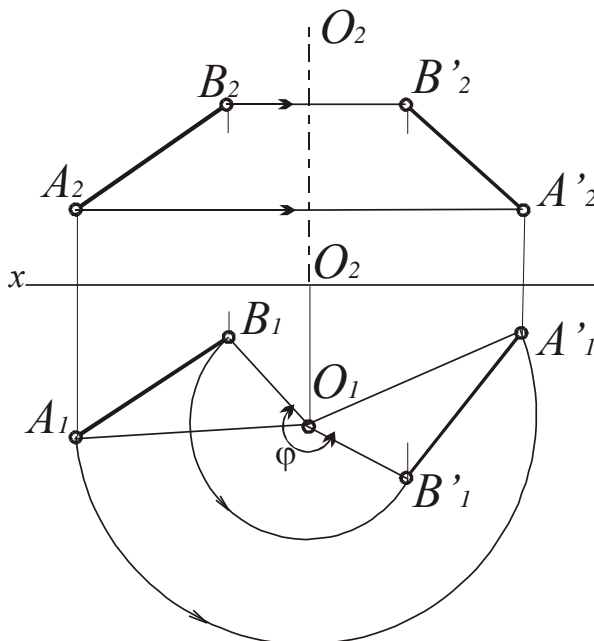


Рис. 90

4.1.3. Определение натуральной величины прямой общего положения

Как известно, отрезок прямой спроецируется на плоскость проекций в свой истинный размер только в том случае, если прямая параллельна этой самой плоскости. Если же требуется определить истинную величину отрезка прямой общего положения, то его вращают вокруг некоторой оси до тех пор, пока отрезок не станет параллельным одной из плоскостей проекций, на которую

он и спроецируется в натуральную величину – отрезок прямой общего положения с помощью способа вращения переводят в частное положение.

Пример 4.1. Дан отрезок прямой общего положения АВ. Требуется определить его истинную величину и угол наклона к горизонтальной плоскости проекций П1 (рис. 91).

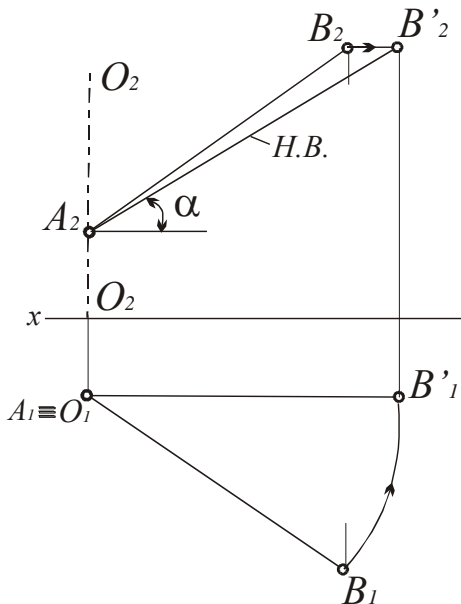


Рис. 91

Для того чтобы воспользоваться способом вращения, проводят ось вращения. Пусть она пройдет через точку A перпендикулярно плоскости П1. В этом случае горизонтальная проекция оси – точка, совпадающая с горизонтальной проекцией точки A , а фронтальная проекция – прямая, перпендикулярная оси X .

Прямую AB поворачивают вокруг принятой оси до положения, когда прямая станет параллельна фронтальной плоскости проекций. Это будет в том случае, когда горизонтальная проекция прямой A_1B_1 станет параллельна оси проекций X . При этом горизонтальная проекция точки B переместится по дуге окружности и займет новое положение B'_1 , а фронтальная проекция точки B –

по прямой, перпендикулярной оси вращения, и займет положение $B2'$.

Таким образом, получают проекции отрезка фронтальной прямой AB' ($AB' \parallel P_2$). Фронтальная проекция такой прямой есть ее истинная величина, а угол между натуральной величиной и плоскостью P_1 равен углу наклона прямой AB к горизонтальной плоскости проекций.

4.1.4. Вращение плоскости

Для того чтобы повернуть плоскость на некоторый угол, достаточно повернуть на этот же угол либо три точки этой плоскости, не лежащие на одной прямой, либо две прямые, принадлежащие этой плоскости.

На рис. 92 показано, как можно повернуть плоскость, заданную треугольником ABC , вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций, на некоторый угол γ . А именно, на требуемый угол γ последовательно поворачивают каждую из вершин данного треугольника, а затем соединяют их новые одноименные проекции.

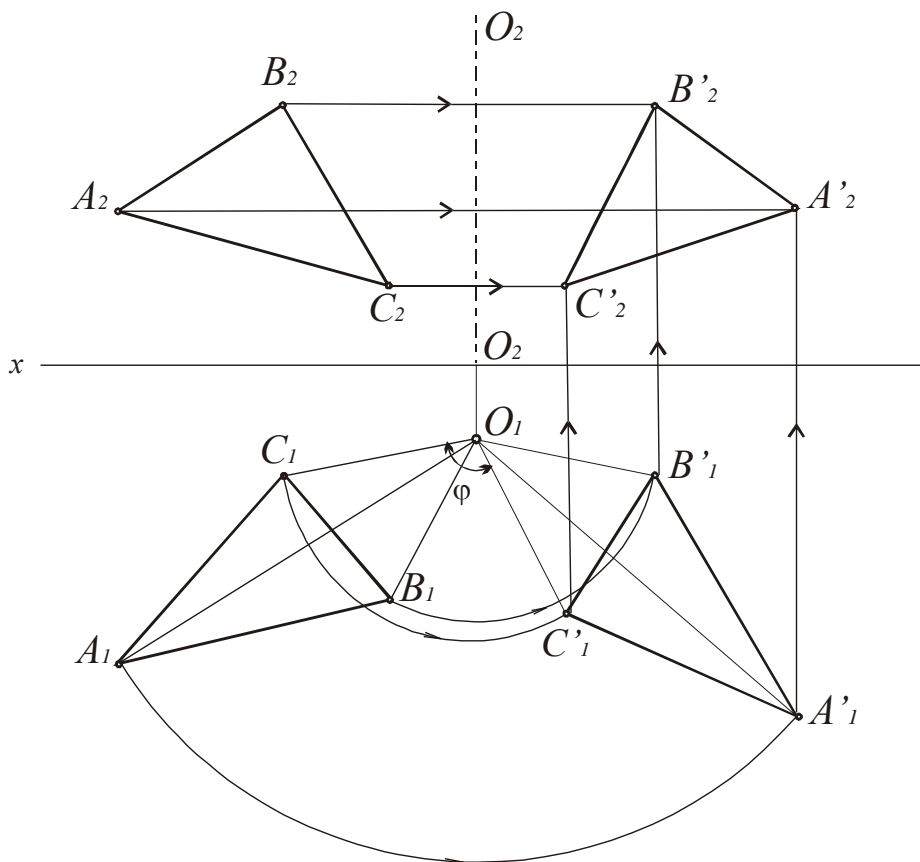


Рис. 92

Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'_1B'_1C'_1$ равны между собой по построению. Это соответствует тому, что угол наклона плоскости ABC по отношению к плоскости P_1 не изменился. Очевидно, что при повороте плоскости вокруг оси, перпендикулярной плоскости P_2 , величина фронтальной проекции и угол наклона к ней не изменяются.

4.1.5. Определение натуральной величины плоской фигуры

Логика решения этой задачи та же, что и в случае с отрезком прямой. Плоская фигура спроецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если она параллельна этой плоскости проекций. Таким образом, если требуется определить натуральную величину плоской фигуры общего положения, заданную фигуру следует повернуть так, чтобы она стала параллельна какой-либо плоскости проекций. Этот поворот осуществляется в два этапа. На первом этапе заданную фигуру переводят в проецирующее положение, а на втором – помещают параллельно одной из плоскостей проекций.

Пример 4.2. Определить натуральную величину треугольника ABC (рис. 93).

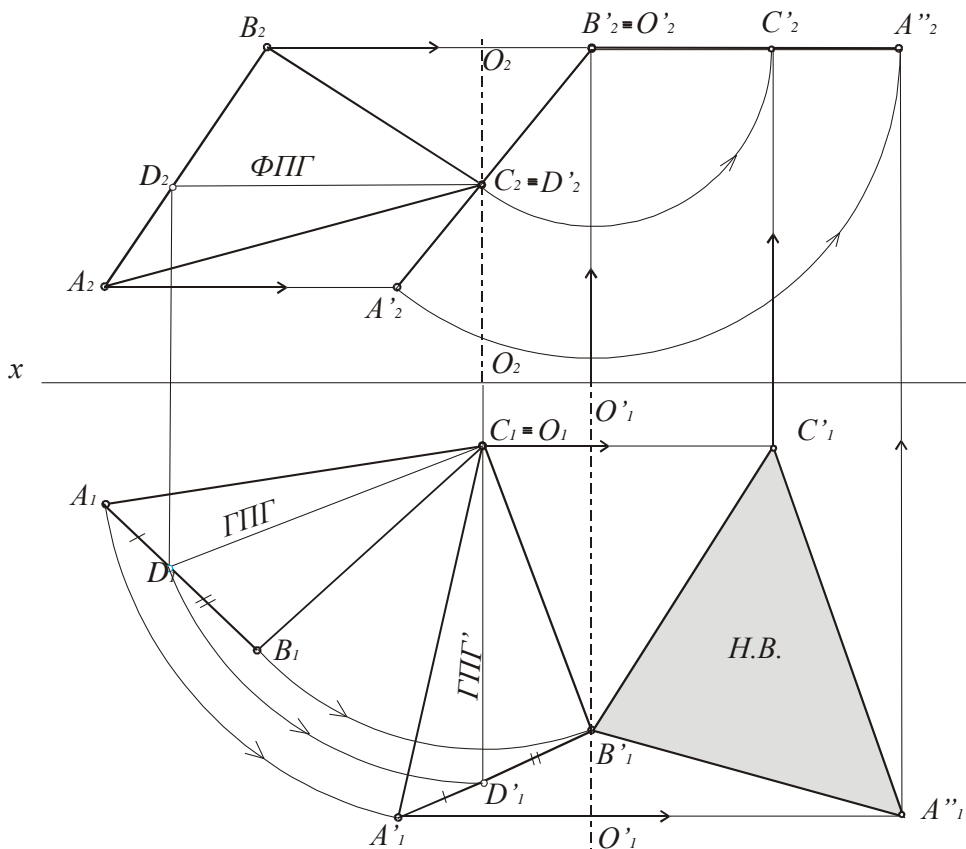


Рис 93

Задача решается последовательным вращением треугольника вокруг двух осей, перпендикулярных плоскостям проекций. Первым вращением вокруг оси $O \perp \Pi_1$ и проходящей через вершину C , треугольнику придают фронтально-проецирующее положение. Для этого поворачивают треугольник так, чтобы горизонталь CD заняла положение, перпендикулярное фронтальной плоскости проекций ($C_1D_1 \perp OX$); фронтальная проекция треугольника при этом вырождается в прямую линию $A'_2C'_2B'_2$. Полученное подтверждает, что треугольник занял фронтально-проецирующее положение.

Вторым вращением вокруг оси O' , перпендикулярной плоскости Π_2 , приводят треугольник в положение, параллельное плоскости Π_1 . При этом его проекция на горизонтальную плоскость будет равна натуральной величине треугольника ABC .

4.2. СПОСОБ ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

4.2.1. Сущность способа

Сущность способа перемены плоскостей проекций состоит в том, что желательное положение проецируемых объектов относительно плоскостей проекций достигается путем замены одной из плоскостей проекций новой, более удачной для данного случая расположения проецируемого объекта. При этом новая плоскость проекций всегда перпендикулярна к одной из тех, которые не менялись. Например, дана произвольная точка A в системе двух плоскостей проекций Π_1 и Π_2 (рис. 94,а). Требуется заменить фронтальную плоскость проекций Π_2 на новую Π_4 . При этом Π_4 должна быть перпендикулярна к Π_1 , то есть к той плоскости, которая не меняется. Пересечение плоскостей Π_1 и Π_4 дает новую ось проекций X_1 . Чтобы спроецировать точку A на новую плоскость Π_4 из нее проводят проецирующий луч перпендикулярно к плоскости Π_4 , точка пересечения луча с плоскостью дает нам проекцию точки A на плоскость Π_4 – A_4 .

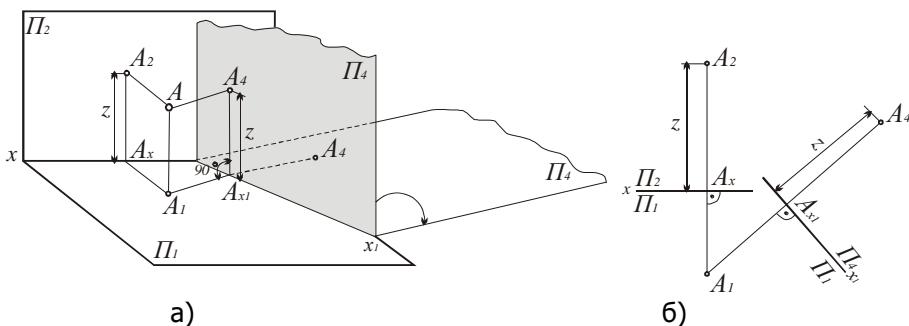


Рис. 94

Для того чтобы перейти от объемного изображения к чер-

тежу, следует новую плоскость проекций повернуть вокруг новой оси проекций до совмещения с плоскостью чертежа (рис.94,а). Чертеж точки А строят в старой системе плоскостей (Π_1 , Π_2) и новой (Π_1 , Π_4). Так как горизонтальная плоскость проекций Π_1 является общей для старой и новой систем, то координата Z точки А остается неизменной. Следовательно, расстояние от новой проекции A_4 до новой оси проекций X_1 равно расстоянию от старой проекции A_1 до оси X (рис. 94,б).

Аналогично можно заменить плоскость Π_1 на новую плоскость Π_4 (рис. 95,а,б)

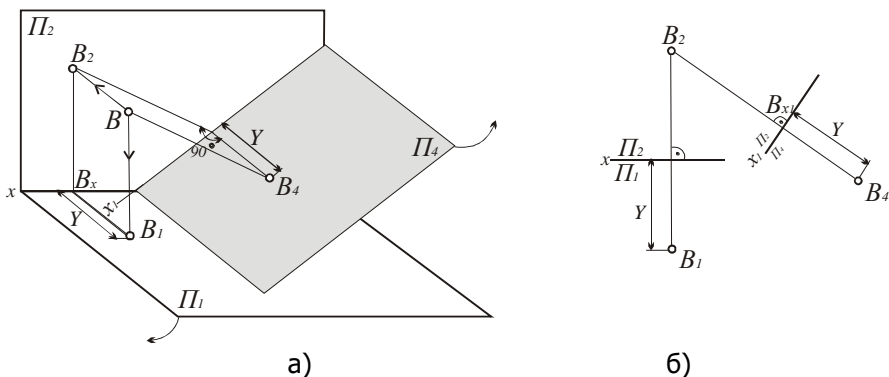


Рис. 95

При решении задач иногда появляется необходимость многократно изменять плоскости проекций. Осуществляется эта замена последовательно и в соответствии с изложенными закономерностями:

- одновременно меняется только одна плоскость проекций;
- новая плоскость должна быть перпендикулярна к той, которая не меняется (старой);
- расстояние от новой проекции точки до новой оси проекций равно расстоянию от точки до той плоскости, которая не меняется.

4.2.2. Определение натуральной величины отрезка прямой общего положения

Дан отрезок АВ прямой общего положения. Требуется определить натуральную его величину и углы наклона прямой к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 (рис. 96).

Известно, что прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину. Следовательно, решение задачи сводится к замене имеющихся плоскостей проекций на такие, относительно которых данная прямая занимала бы частное положение, т.е. была бы параллельна им и проецировалась бы на них в натуральный размер и с натуральными углами наклона к остальным плоскостям проекций.

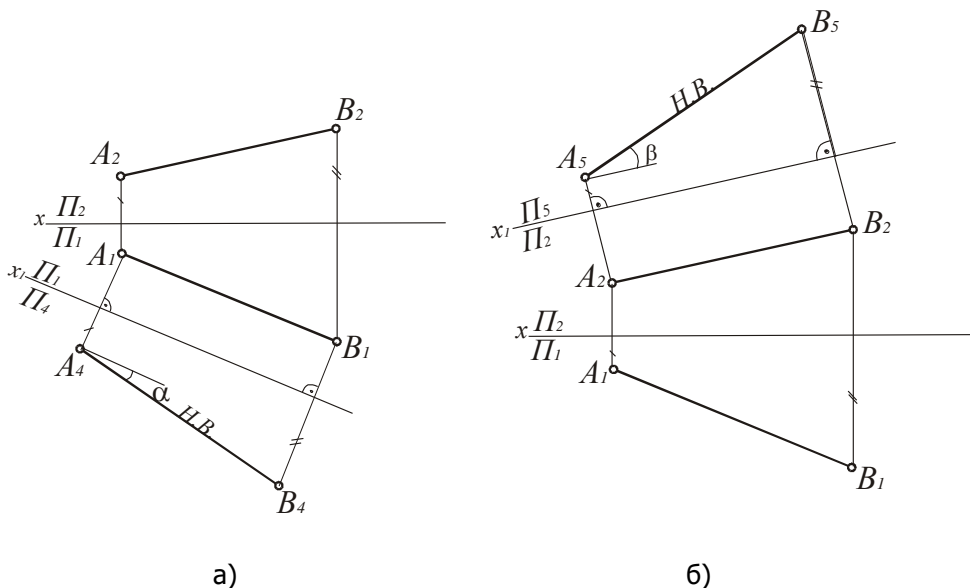


Рис. 96

Для определения натуральной величины отрезка АВ и угла наклона его к Π_1 заменяют фронтальную плоскость Π_2 на новую Π_4 (Π_4 перпендикулярна Π_1) таким образом, чтобы данный отрезок АВ стал параллелен Π_4 (рис 96,а).

Для этого новая ось проекций X_1 должна быть параллельна горизонтальной проекции отрезка A_1B_1 . Строят проекцию отрезка AB на плоскость P_4 . Плоскость P_1 осталась без изменений, поэтому расстояние от оси X_1 до новых проекций точек A и B равно расстоянию от этих точек до плоскости P_1 (координаты Z точек A и B). Проекция A_4B_4 – истинная величина отрезка прямой AB , угол α – угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций P_1 .

Для определения угла наклона прямой к фронтальной плоскости проекций заменяют горизонтальную плоскость проекций P_1 на новую P_5 ($AB \parallel P_5$, $X_2 \parallel A_2B_2$). Прямая AB параллельна новой плоскости P_5 , значит A_5B_5 есть натуральная величина отрезка AB , а угол β – это угол наклона данной прямой к P_2 (рис 96,б).

4.2.3. Определение натуральной величины плоской фигуры общего положения

Плоская фигура проецируется на плоскость в свою истинную величину, если она параллельна этой плоскости. Следовательно, для того чтобы определить размер плоской фигуры общего положения, требуется перевести ее в параллельное положение относительно какой-либо плоскости, на которую она и спроецируется в свой натуральный размер. Эта операция осуществляется в два этапа. Первой заменой плоскостей проекций добиваются проецирующего положения плоской фигуры, второй – параллельного.

Например, плоскость общего положения задана треугольником ABC (рис. 97). Требуется определить его натуральную величину.

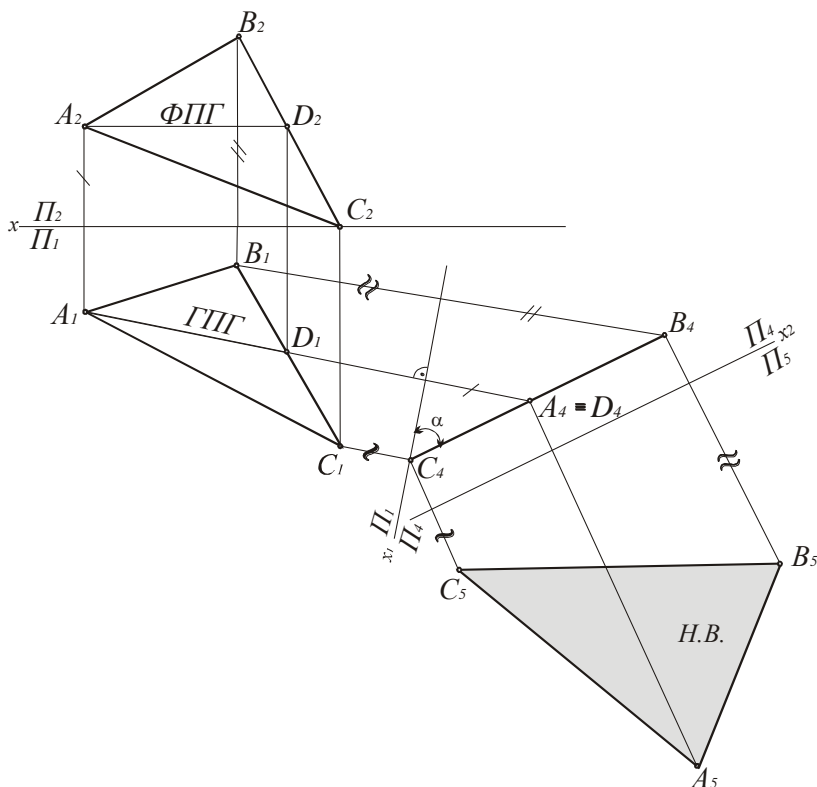


Рис. 97

Вначале заменяют плоскость Π_2 на Π_4 , т.о. чтобы новая плоскость Π_4 была перпендикулярна плоскости треугольника ABC. Для этого проводят в плоскости треугольника горизонталь (AD). Новая ось проекций X_1 должна быть перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали A_1D_1 (т.к. $\Pi_4 \perp \Delta ABC$). Расстояния от X_1 до проекций A_4 , B_4 и C_4 равны расстояниям от точек A, B и C до горизонтальной плоскости соответственно, т.к. горизонтальная плоскость в данном случае не меняется. Проекция треугольника ABC на плоскость Π_4 выродилась в прямую линию $A_4B_4C_4$, значит замена плоскостей проведена правильно и треугольник ABC занял проецирующее (перпендикулярное) положение относительно введенной плоскости Π_4 .

Затем горизонтальную плоскость P_1 заменяют на новую плоскость P_5 таким образом, чтобы плоскость P_5 была параллельна плоскости заданного треугольника. В этом случае новая ось проекций X_2 должна быть параллельна $A_4B_4C_4$. Расстояния от X_2 до A_5 , B_5 и C_5 равны расстояниям от точек A , B и C до плоскости P_4 , которая на этом этапе не меняется. Проекция треугольника ABC на плоскость P_5 есть его натуральная величина ($A_5B_5C_5$ – натуральная величина заданного треугольника ABC).

Вопросы для самоконтроля по теме «Способы преобразования проекций»

1. Для чего применяют способы преобразования чертежа?
2. В чем заключается основное отличие этих способов друг от друга?
3. В чем сущность способа вращения?
4. Что такое плоскость вращения точки и как она располагается относительно оси вращения?
5. Что такое радиус вращения точки?
6. Как найти натуральную величину отрезка прямой общего положения способом вращения?
7. Как найти натуральную величину плоской фигуры способом вращения?
8. В чем сущность метода перемены плоскостей проекций?
9. Как найти натуральную величину отрезка прямой общего положения методом перемены плоскостей проекций?
10. Как найти натуральную величину плоской фигуры методом перемены плоскостей проекций?

Задачи для самостоятельной работы по теме «Способы преобразования проекций»

Способ вращения

1. Повернуть точку A на угол 90° вокруг оси, перпендикулярной Π_1 (рис. 98).

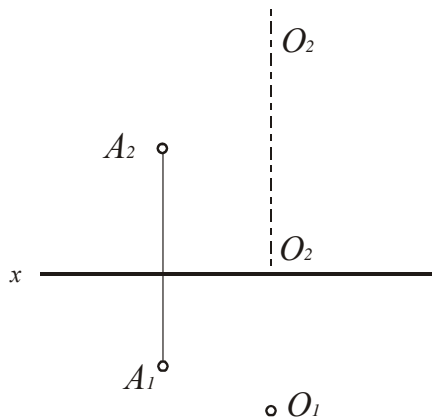


Рис. 98

2. Способом вращения ввести точку F в плоскость ABC (рис. 99).

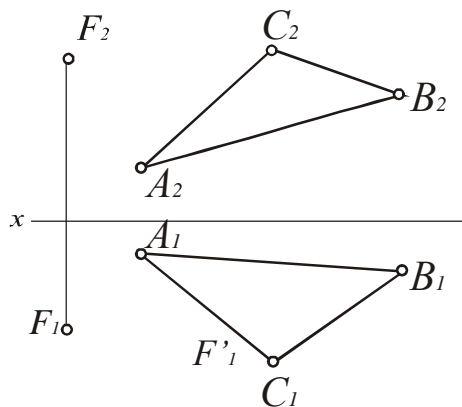


Рис. 99

3. Определить натуральную величину отрезка BC (рис. 100).

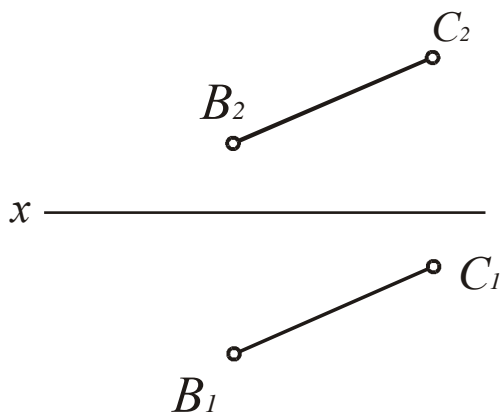


Рис. 100

4. Определить натуральную величину треугольника ABC (рис. 101).

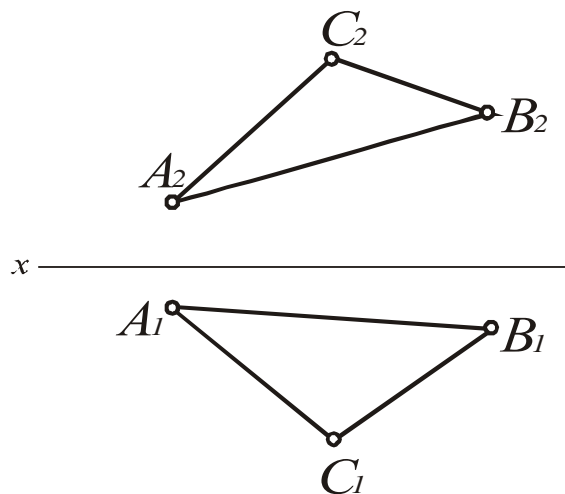


Рис. 101

5. Определить натуральную величину расстояния от точки S до плоскости ABC (рис. 102).

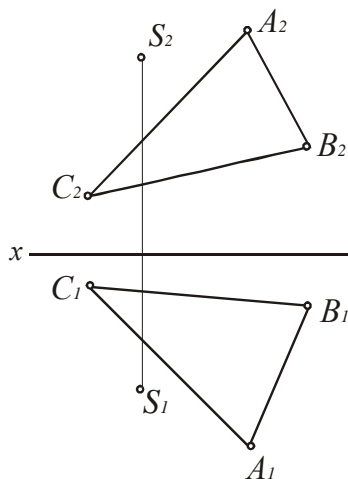


Рис. 102

6. Определить натуральную величину расстояния от точки S до плоскости α (рис. 103).

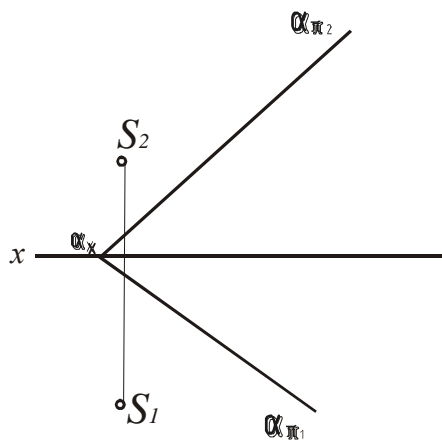


Рис. 103

Способ перемены плоскостей проекций

7. Определить натуральную величину отрезка АВ (рис. 104).

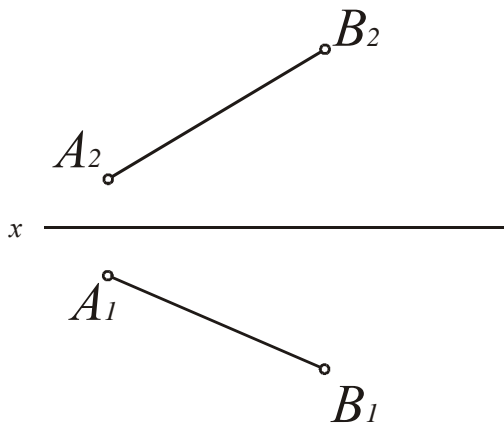


Рис. 104

8. Определить натуральную величину треугольника ABC (рис. 105).

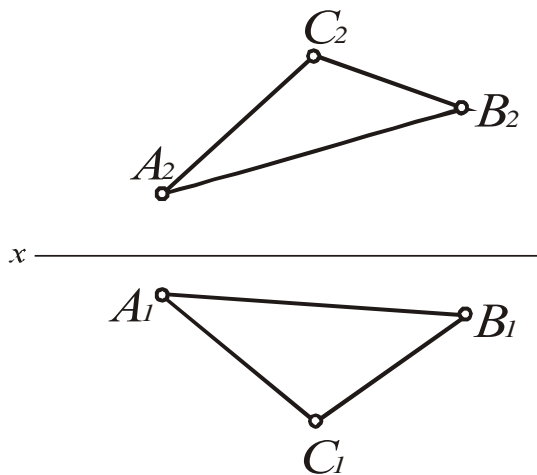


Рис. 105

9. Определить натуральную величину расстояния от точки S до плоскости ABC (рис. 106).

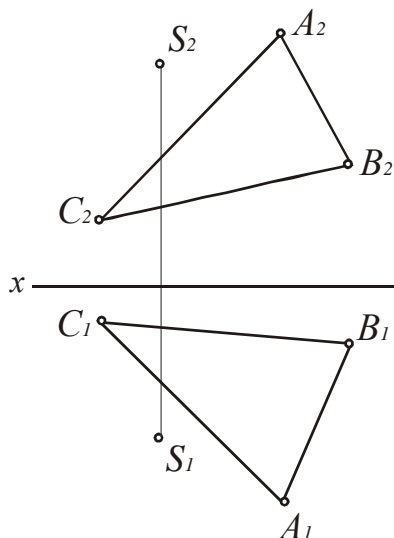


Рис. 105

10. Определить натуральную величину расстояния от точки S до плоскости α (рис. 107).

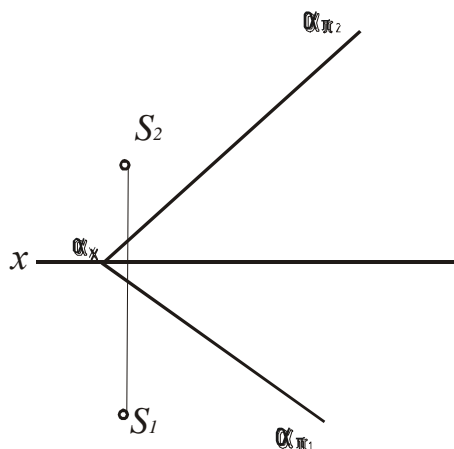
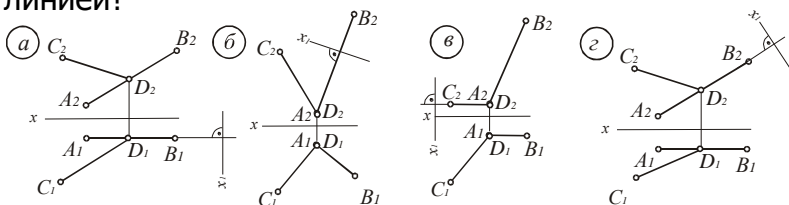


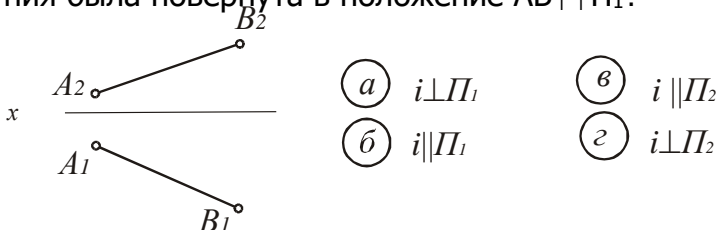
Рис. 107

Тест по теме «Способы преобразования проекций»

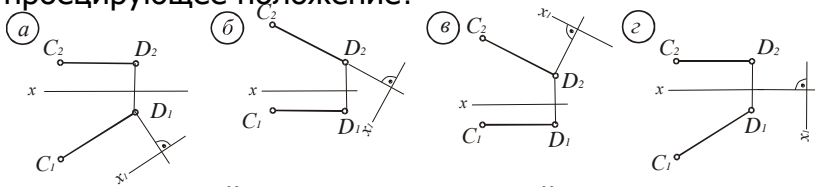
1. На каком чертеже плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми, спроецируется на новую плоскость проекций, определенной осью x_1 , прямой линией?



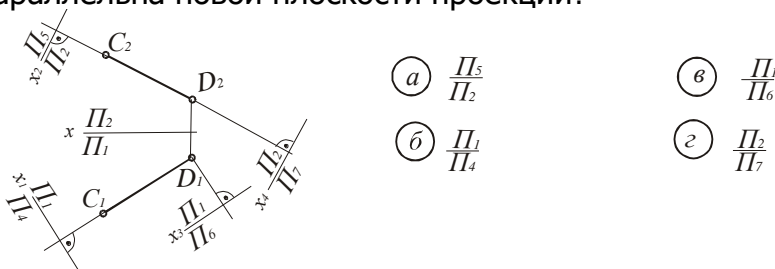
2. Как должна быть расположена ось, чтобы путем вращения вокруг нее прямая AB общего положения была повернута в положение $AB \parallel \Pi_1$?



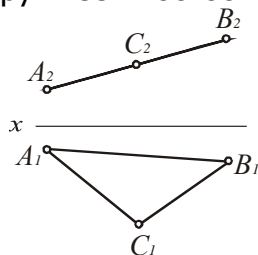
3. Определить, на каком чертеже отрезок CD в новой системе плоскостей, заданной осью x_1 , займет проецирующее положение?



4. В какой системе плоскостей прямая CD будет параллельна новой плоскости проекций?



5. Как должна располагаться ось, чтобы вращением вокруг нее плоскость заняла положение $\parallel \Pi_1$?



(a) $i \perp \Pi_1$

(в) $i \parallel \Pi_2$

(б) $i \parallel \Pi_1$

(г) $i \perp \Pi_2$

ТЕМА 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА

5.1. МНОГОГРАННИКИ

5.1.1. Общие понятия

Многогранником называется тело, со всех сторон ограниченное плоскостями. Элементами многогранника являются вершины, ребра и грани.

Для построения ортогональных проекций многогранника, достаточно построить проекции его вершин. Соединив вершины прямыми линиями, получим проекции ребер и граней многогранника.

5.1.2. Пресечение многогранника плоскостью частного положения

Сечение многогранника плоскостью представляет собой многоугольник, вершины которого расположены на ребрах многогранника и являются точками пересечения их с секущей плоскостью, а стороны – на его гранях они представляют собой линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью.

Построение фигуры сечения многогранника плоскостью частного положения рассмотрим на примере.

Пример 5.1. Построить проекции и натуральную величину фигуры сечения пирамиды $SABC$ фронтально-проецирующей плоскостью (рис. 108).

Поскольку секущая плоскость фронтально-проецирующая, ее фронтальный след обладает собирательным свойством, следова-

тельно, фронтальные проекции точек, принадлежащих фигуре сечения ($1_2, 2_2, 3_2$), находятся на нем, в точках пресечения с соответствующими ребрами. Горизонтальные проекции точек $1, 2, 3$ находят обычным проецированием. Соединив проекции $1_1, 2_1, 3_1$, получают горизонтальную проекцию фигуры сечения (фронтальная проекция совпадает с фронтальным следом плоскости α). Натуральную величину фигуры сечения находят одним из методов преобразования проекций.

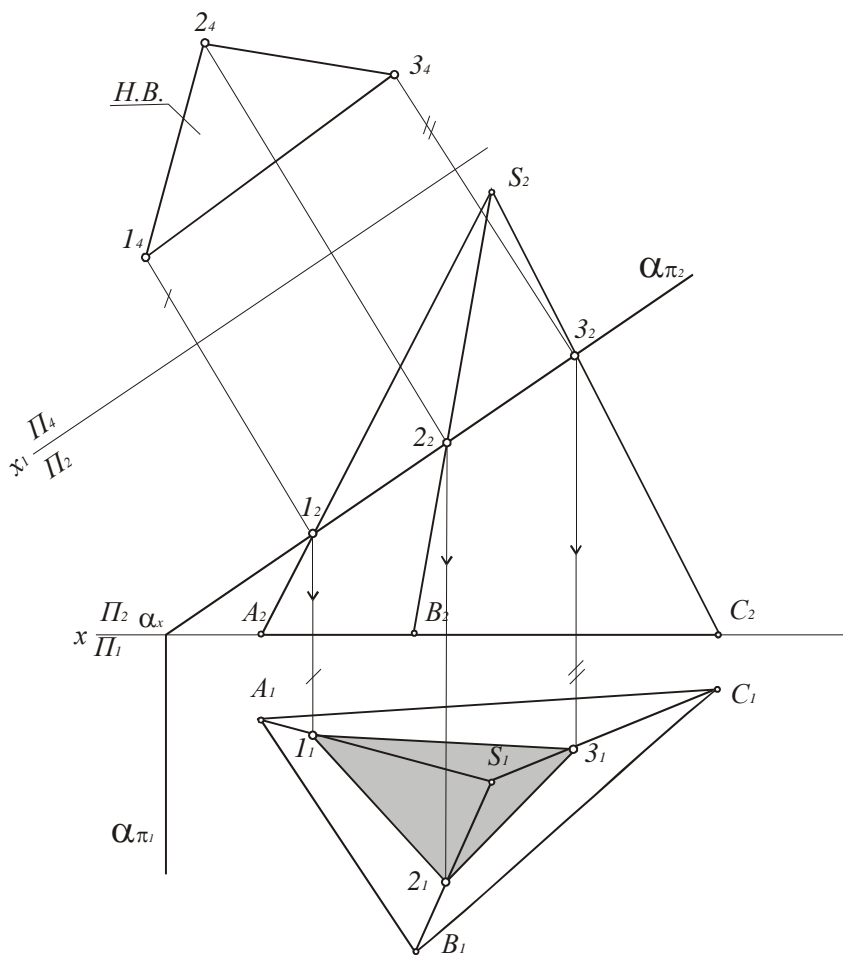


Рис. 108

5.1.3. Пресечение пирамиды прямой линией

Прямая, пересекающаяся с поверхностью геометрического тела, в общем случае имеет с ней две общие точки – точку входа и точку выхода.

Задача нахождения точек пересечения прямой с поверхностью геометрического тела решается аналогично задаче

нахождения точки пересечения прямой и плоскости:

- 1) прямую заключают во вспомогательную проецирующую плоскость;
- 2) строят проекции фигуры сечения;
- 3) на пересечении проекции прямой с контуром проекции фигуры сечения определяют искомые точки входа и выхода.

Пример 5.2. Найти точки пересечения прямой EF с пирамидой SABC (рис. 109).

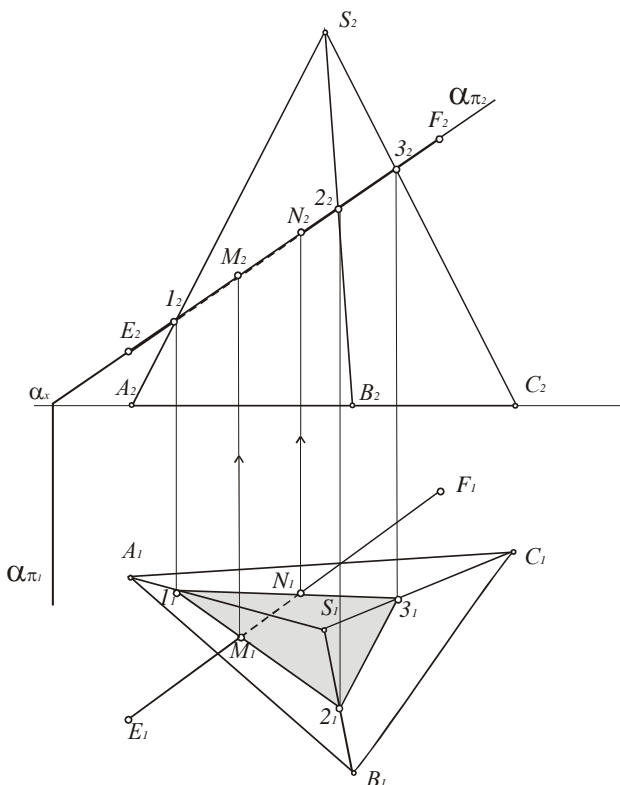


Рис. 109

Прямую EF заключают во фронтально-проецирующую плоскость. Строят фигуру сечения 123. На горизонтальной проекции находят точки пересечения прямой с контуром треугольника $1_1 2_1 3_1 - M_1$ и N_1 , находят их фронтальные проекции.

5.1.4. Пресечение пирамиды плоскостью общего положения

Построение фигуры пересечения многогранника с плоскостью общего положения рассмотрим на примере (рис. 110).

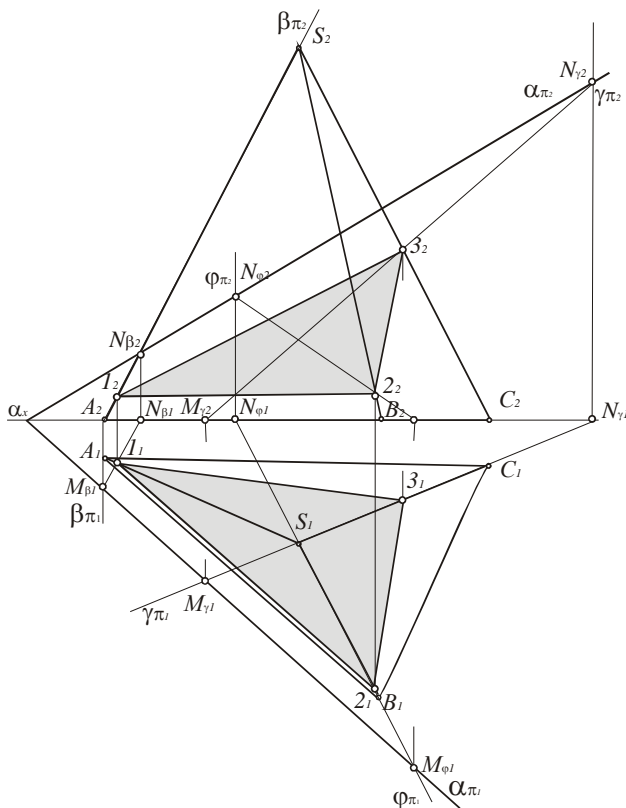


Рис. 110

Пример 5.3. Построить проекции фигуры пересечения пирамиды $SABC$ с плоскостью общего положения (рис.110).

Чтобы построить фигуру сечения необходимо определить точки пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью. Для того чтобы определить точку пересечения ребра SC с плоскостью α , следует заключить ребро во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость γ , построить линию пересечения плоскостей α и γ (прямая $M_{\gamma 1}N_{\gamma 1}$), а затем найти фронтальную проекцию точки 3 на пересечении фронтальной проекции линии пересечения плоскостей ($M_{\gamma 2}N_{\gamma 2}$) и фронтальной проекции ребра S_2C_2 . Горизонтальная проекция точки 3 будет на S_1C_1 .

Аналогично находят точки пересечения ребер AS и BC с плоскостью α , заключая их во вспомогательные плоскости β ($\beta \perp P_2$) и φ ($\varphi \perp P_1$) соответственно.

Соединив одноименные проекции точек $1, 2, 3$, получают проекции фигуры сечения.

5.2.КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТЕЛА. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

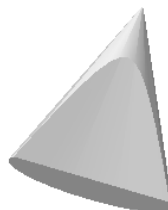
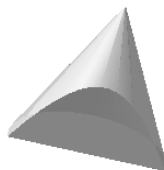
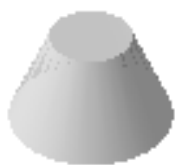
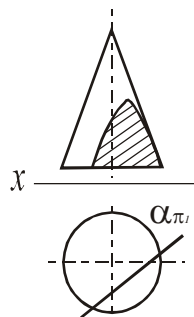
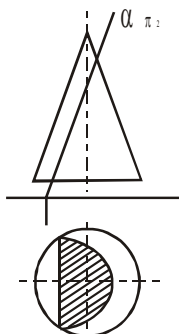
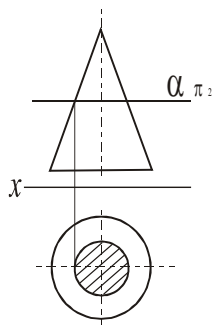
5.2.1.Общие понятия

Криволинейными телами называются геометрические тела, образованные кривыми поверхностями. Среди них выделяют тела вращения, т.е. такие тела, поверхность которых образована в результате вращения прямой или кривой линии вокруг некоторой оси. К телам вращения относятся цилиндр, конус, шар, тор и

т.п. Важными элементами тел вращения являются образующая и ось вращения.

5.2.2. Пересечение конуса плоскостью частного положения

При пересечении прямого кругового конуса плоскостью частного положения в сечении могут получаться различные фигуры в зависимости от положения секущей плоскости (рис.111). Если секущая плоскость параллельна основанию, то в сечении будет окружность (рис.111,а). Если след секущей плоскости параллелен одной образующей конуса, получим параболу (рис. 111,б). В случае, когда след секущей плоскости параллелен двум образующим конуса, сечение – гипербола (рис.111,в). При произвольном угле наклона секущей плоскости к основанию в сечении – эллипс (рис.111,г). И, наконец, если секущая плоскость проходит через вершину конуса, получаем прямолинейное сечение – треугольник (рис.111,д).



а)

б)

в)

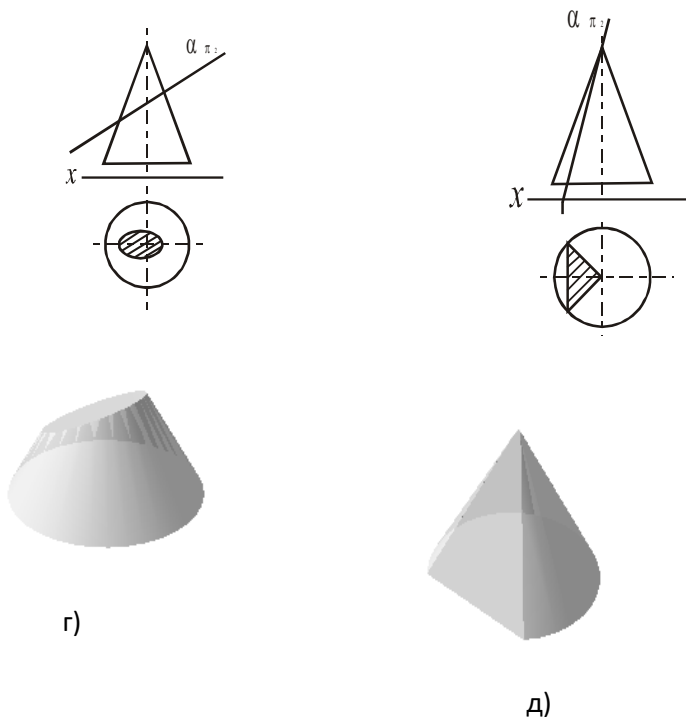


Рис. 111

Рассмотрим пример построения сечения, полученного при пересечении прямого кругового конуса фронтально-проецирующей плоскостью α (рис.112).

Так как фигура сечения принадлежит и конической поверхности, и фронтально-проецирующей секущей плоскости, фронтальная проекция фигуры сечения находится на фронтальном следе $\alpha \pi_2$. Для построения горизонтальной проекции фигуры сечения пользуются следующим положением: точка принадлежит какой-либо поверхности, если она принадлежит прямой

или кривой линии, принадлежащей этой поверхности. На фронтальной проекции сечения берут несколько точек, проводят через них образующие, строят горизонтальные проекции этих образующих, находят на них горизонтальные проекции взятых точек и соединяют их плавной кривой линией. Полученная фигура и есть горизонтальная проекция искомого сечения. Натуральную величину сечения можно определить с помощью методов преобразования (см. тему 4).

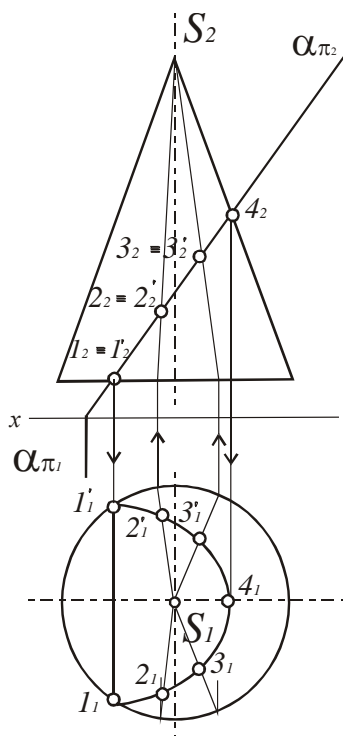


Рис. 112

5.2.3. Пересечение боковой поверхности прямого кругового конуса прямой линией

Для нахождения точек пересечения боковой поверхности конуса с прямой линией необходимо:

- заключить заданную прямую линию во вспомогательную плоскость;
- построить фигуру сечения, полученного при пересечении конической поверхности вспомогательной плоскостью;
- определить точки входа и выхода как точки пересечения проекции заданной прямой с построенной фигурой сечения.

Вспомогательная плоскость может быть выбрана произвольно, однако наиболее часто в качестве вспомогательных используют плоскости частного положения либо плоскости, позволяющие получить прямолинейные сечения.

На рис. 113 изображен прямой круговой конус с вершиной S и прямая общего положения AB . Требуется определить точки пересечения этой прямой с боковой поверхностью конуса.

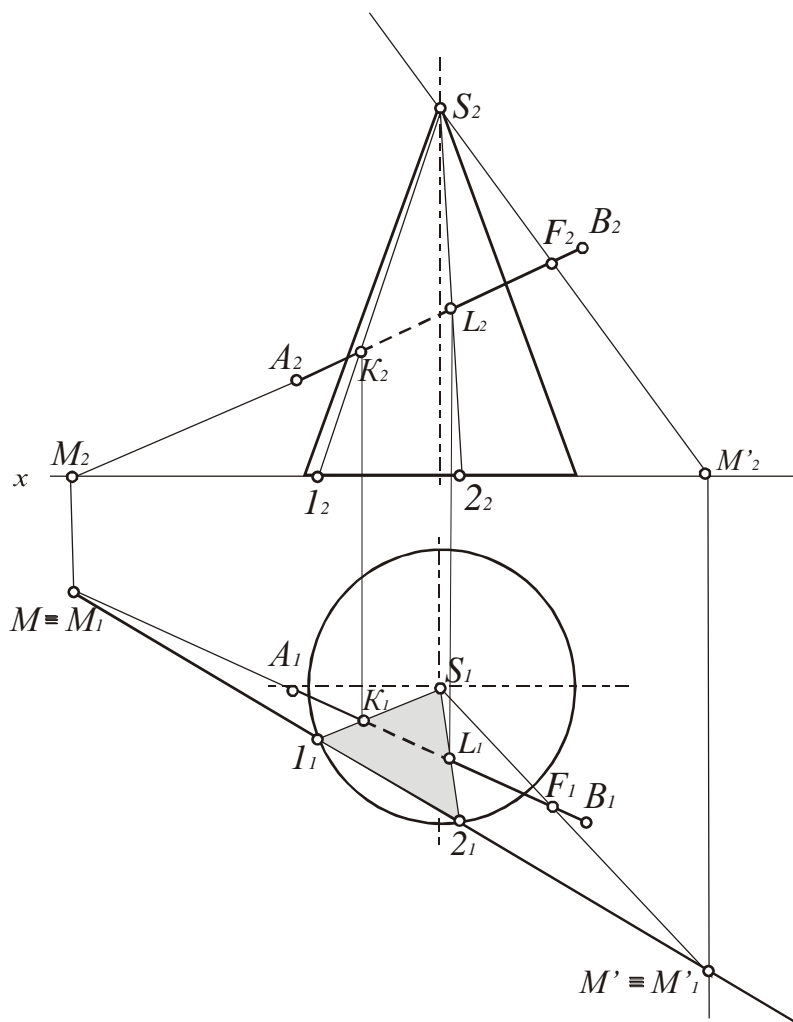


Рис. 113

Известно, что при пересечении конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, в сечении получится треугольник. Известно также, что плоскость может быть задана двумя пересекающимися прямыми. Таким образом, чтобы получить пря-

молинейное сечение конуса, следует через вершину конуса S провести секущую плоскость, заданную двумя пересекающимися прямыми. Одна из прямых это данная прямая AB , а вторая – проходящая через вершину конуса S и точку F , произвольно взятую на прямой AB . Затем строят сечение конуса. Так как, вспомогательная секущая плоскость проходит через вершину S , сечение конуса будет треугольное. Вершина сечения находится на вершине конуса, а основание треугольника лежит на основании конуса и совпадает с горизонтальным следом секущей плоскости. Для построения горизонтального следа секущей плоскости находят горизонтальные следы M и M' прямых AB и SF . Учитывая тот факт, что следы прямых, принадлежащих плоскости лежат на одноименных следах этой плоскости, соединив полученные точки M и M' , получают горизонтальный след вспомогательной секущей плоскости, который, располагаясь на горизонтальной плоскости проекций, пересекает основание конуса в точках 11 и 21 . Треугольник $12S$ – сечение, полученное при пересечении прямого кругового конуса вспомогательной секущей плоскостью, заданной двумя пересекающимися прямыми AB и AS . Проекции заданной прямой AB пересекаются с построенной фигурой сечения в точках K и L , которые и являются искомыми точками пересечения прямой AB с боковой поверхностью конуса.

5.2.4. Пересечение прямого кругового конуса плоскостью общего положения

Для построения фигуры сечения, полученного при пересечении прямого кругового конуса плоскостью общего положения, можно воспользоваться способом перемены плоскостей проекций.

На рис. 114 изображен прямой круговой конус с вершиной S и плоскость общего положения α . Требуется построить фигуру сечения, полученного в результате пересечения заданных конуса и плоскости.

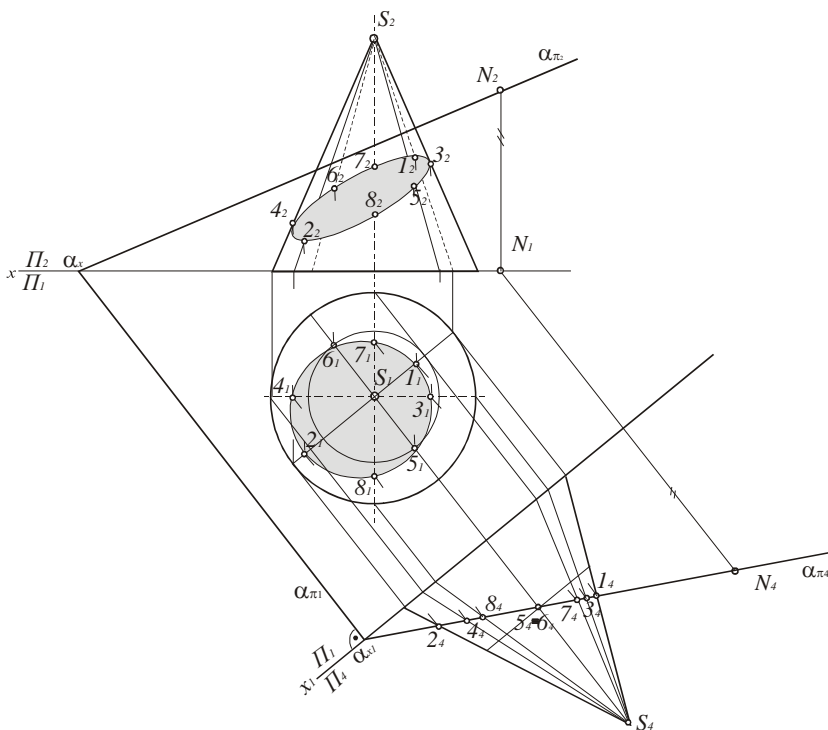


Рис. 114

С этой целью фронтальную плоскость проекций $P2$ заменяют на новую $P4$, причем проводят новую плоскость таким образом, чтобы заданная секущая плоскость α была перпендикулярна ей. В этом случае новая ось проекций $X1 \perp \alpha P1$. Точка пересечения $\alpha P1$ с $X1$ – это новая точка схода следов $\alpha X1$. Для построения следа $\alpha P4$ берут на фронтальном следе плоскости α произвольную точку N , строят ее проекцию $N4$. Соединив $N4$ с $\alpha X1$, получают новый след плоскости $\alpha P4$. Строят проекцию заданного конуса на плоскость $P4$. Таким образом, в новой системе плоскостей проекций $P1P4$ прямой круговой конус пересекается уже плоскостью частного положения α . Решение такой задачи приведено в п. 5.2.2. Строят горизонтальную, а затем фронтальную проекции искомой фигуры сечения. Натуральную величину сечения можно определить с помощью способов вращения или перемены плоскостей проекций.

5.2.5. Пересечение криволинейных тел

Линия пересечения криволинейных тел – кривая линия, для построения которой можно использовать способ плоскостей - посредников. Рассмотрим этот способ на примере.

На рис. 115 изображены пересекающиеся цилиндр и полусфера. Требуется построить линию их пересечения.

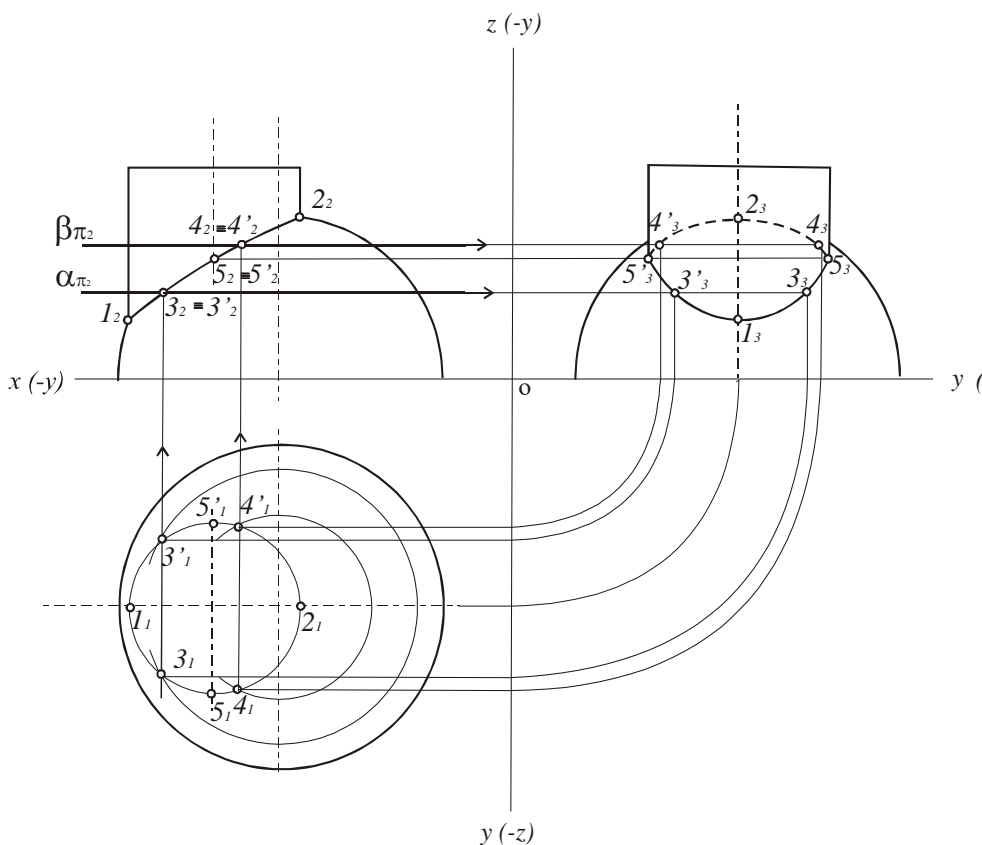


Рис. 115

Проекции точек 1 и 2 находят на пересечении очерковых образующих цилиндра и полусферы, поэтому нахождение их проекций не вызывает затруднений.

Для нахождения проекций точек 3и 3' проводят вспомогательную плоскость α таким образом, чтобы при пересечении ею заданных геометрических тел получались простейшие сечения: прямолинейные или окружности. В данном случае в качестве вспомогательной использована горизонтальная плоскость

уровня α (сечения заданных тел – окружности). Строят горизонтальные проекции этих сечений. Сечение цилиндра – окружность постоянного радиуса. Сечение полусферы – окружность переменного радиуса (размер радиуса зависит от положения плоскости α). На пересечении горизонтальных проекций сечений, полученных при пересечении заданных тел плоскостью α , находят горизонтальные проекции точек 3 и 3' (они являются общими для цилиндра и полусферы). Фронтальные проекции точек 3 и 3' лежат на фронтальном следе плоскости α .

Для нахождения точек 4 и 4' вводят вспомогательную горизонтальную плоскость уровня β . Строят сечения, находят проекции точек 4 и 4'. Соединив полученные фронтальные проекции точек 1, 2, 3, 3', 4, 4', получают фронтальную проекцию линии пересечения цилиндра и полусферы. Горизонтальная ее проекция располагается на горизонтальной проекции цилиндра, т.к. его боковая поверхность горизонтально-проецирующая. Чем больше секущих плоскостей будет взято, а следовательно, больше общих точек найдено, тем более точно будет построена линия пересечения заданных криволинейных тел.

Вопросы для самоконтроля по теме «Геометрические тела»

1. Что называется многогранником?
2. Как строятся проекции многогранников?
3. Как строится фигура, получаемая при пересечении призмы или пирамиды плоскостью?
4. Как строятся точки пересечения призмы или пирамиды прямой линией (точки входа и выхода)?
5. Какие фигуры получаются при пересечении конуса плоскостями частного положения?
6. Какие фигуры получаются при пересечении цилиндра плоскостями частного положения?
7. В чем заключается способ построения точек пресечения прямой линии с кривой поверхностью?

Задачи для самостоятельной работы по теме «Геометрические тела»

Многогранники

Построить фигуры сечений, определить их натуральные величины (рис. 116,а,б).

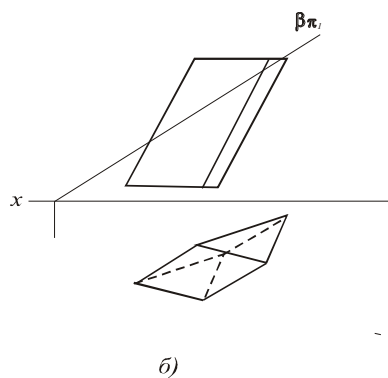
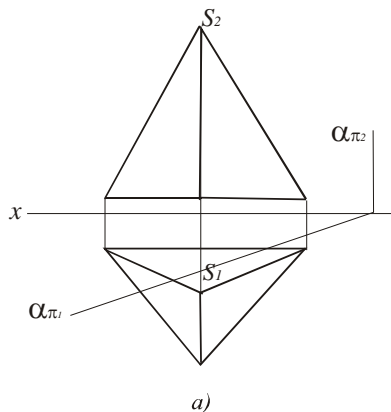


Рис. 116

Построить недостающие проекции точек, лежащих на
гранях пирамиды (рис. 117).

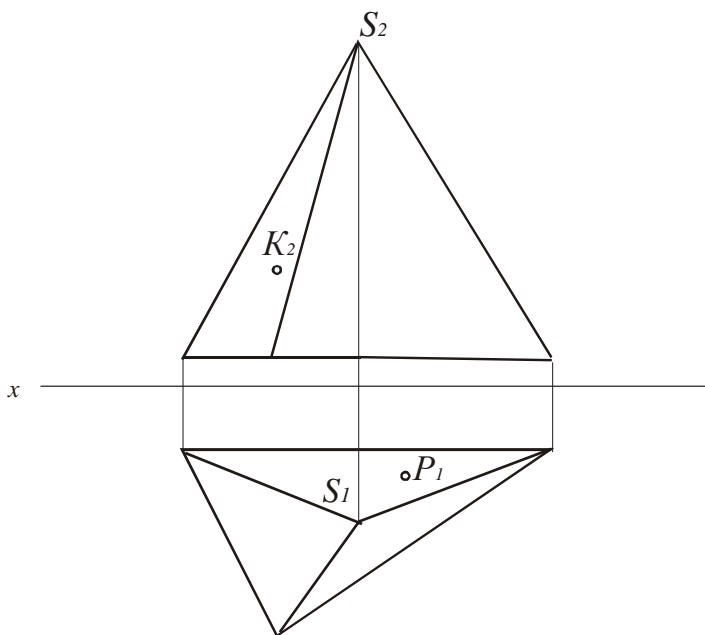


Рис. 117

3. Построить фигуру сечения и определить ее натуральную величину (рис.118).

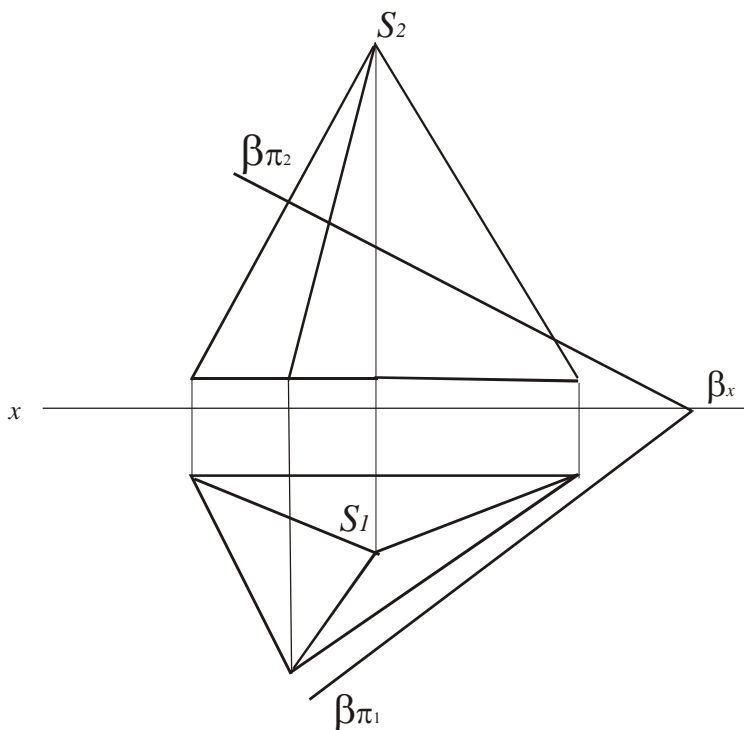


Рис. 118

Тела вращения

4. Построить фигуры сечений, определить их натуральные величины (рис. 119, а, б, в).

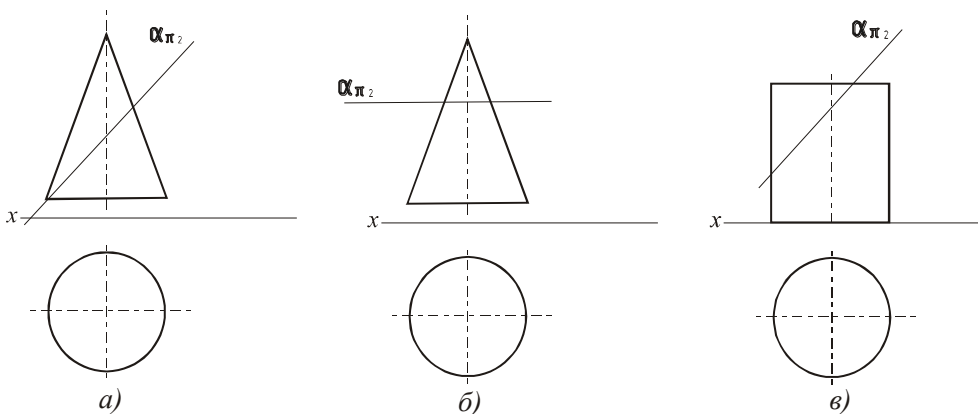


Рис. 119

5. Построить недостающие проекции точек принадлежащих боковой поверхности точек (рис.120).

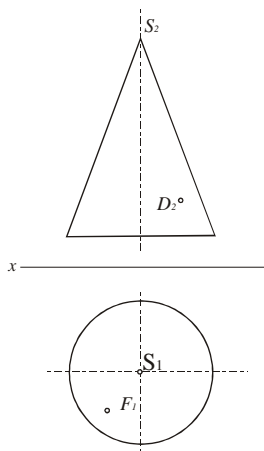


Рис. 120

6. Построить фигуру сечения и определить ее натуральную величину (рис.121,а,б).

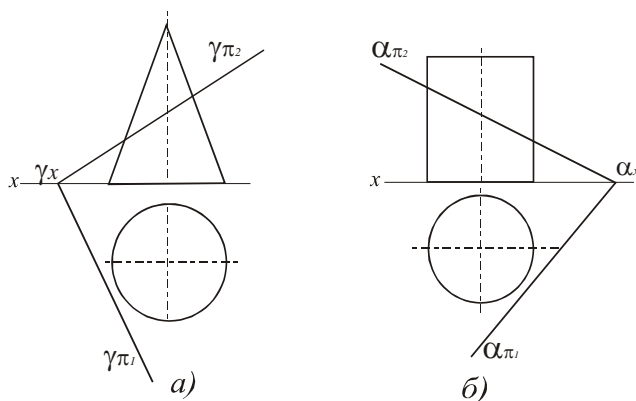
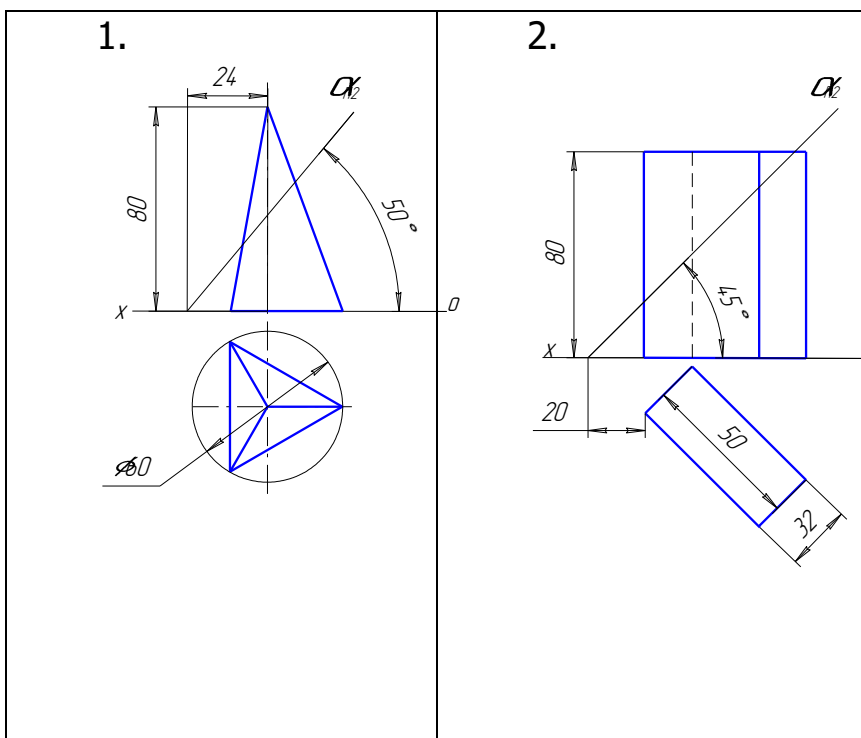


Рис. 121

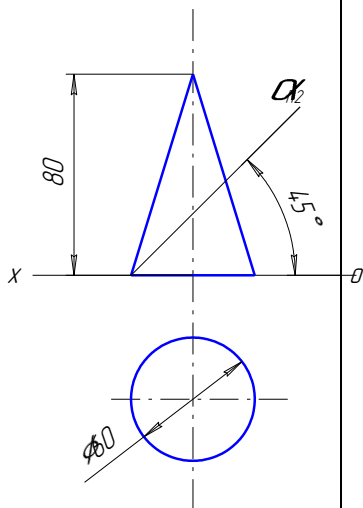
Контрольная работа по теме «Геометрические тела»

Задание Построить третью проекцию геометрического тела, проекции фигуры сечения, найти ее натуральную величину.

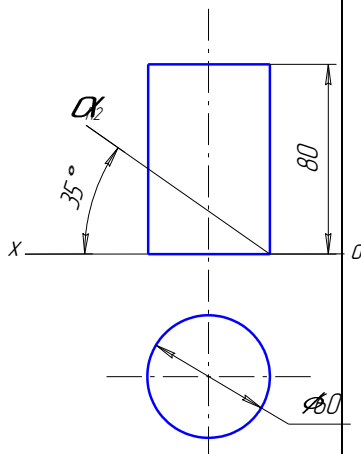
Варианты



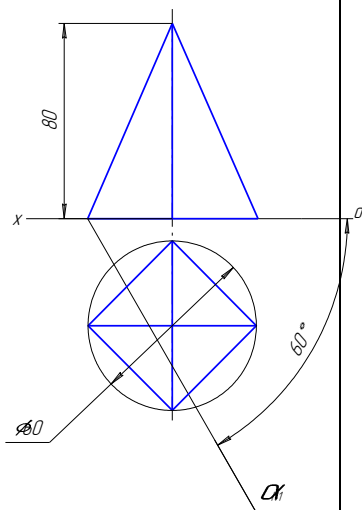
3.



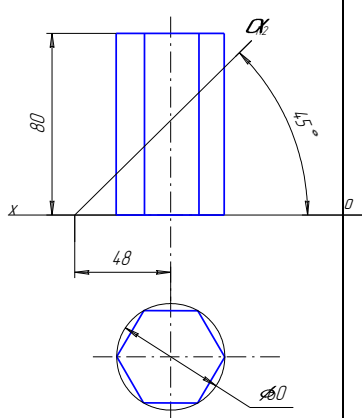
4.



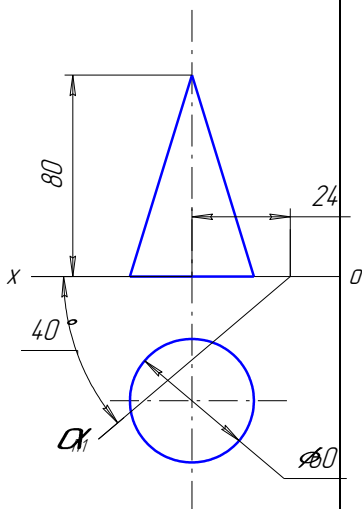
5.



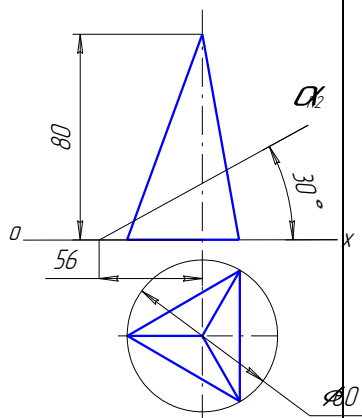
6.



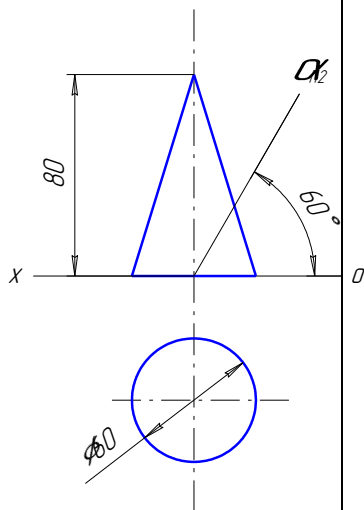
7.



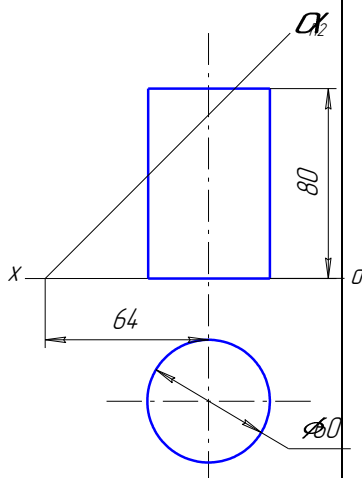
8.



9.



10.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ